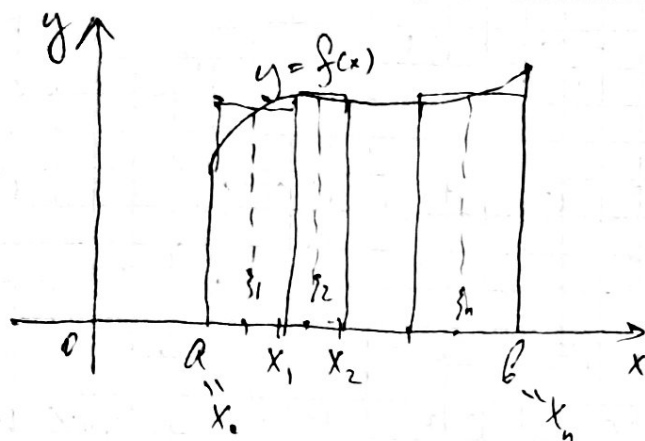


Загл. крп. "Дар м." 1 курс, 2 сем., Мат. Анализ
асмидох.с.м.с.у

12

§1. Определённый интеграл Основные понятия

11.



Опр.1 Разбиением (неразмеренным) отрезка $[a, b]$ наз-ся мн-во $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, т.е. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Опр.2 Разбиение T' наз-ся уменьшенным разбиением T , если $T \subset T'$. Разбиение $T = T_1 \cup T_2$ наз-ся объединением разбиений T_1 и T_2 . Очевидно, что если $T = T_1 \cup T_2$, то T - уменьшение для каждого из T_j , $j = 1, 2$.

Опр.3 Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$. Тогда $\Delta_T = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ - диаметр разбиения T .

Опр.4 Пусть $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ - произвольный; $k = 1, \dots, n$, совокупность $V = \{x_0, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n\}$ наз-ся размеренным разбиением отрезка $[a, b]$ соотв-но неразмеренному раз-ию T . Диаметр Δ_V размеренного раз-ия по раз-ию T считаем равным диаметру Δ_T соот-но неразмеренного раз-ия.

Пусть функ-ия f опр-на на $[a, b]$.

Опр.5 Интегральной суммой для функ-ии f на $[a, b]$, соответствующей размеренному раз-ию V , наз-ся величина $\sigma_f(V) = \sigma(V) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$.

Опр.6 Число I наз-ся определённым интегралом (Римана) от функции f по отрезку $[a, b]$, если

1 дв-и предельн интегр. сумм при стремлении
шагм разбения к нулю, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.е. $\forall V$ -размешенное разбиение σ_a, σ_b ,

$$\Delta_v \cdot \delta : |\sigma(v) - I| < \varepsilon.$$

Получим, что функ-ия f интегр-на (по Риману) на отрезке
 σ_a, σ_b и имеет: $f \in R[\sigma_a, \sigma_b]$. Обозначим: $I = \int_a^b f(x) dx$

Далее дан $f \in R[\sigma_a, \sigma_b]$, то интеграл определен единств. образом.

Д-во: Пусть дана I_1 и I_2 зад-ые отр-ки b . Предположим,
что $I_1 \neq I_2$. Положим в отр-и: $\varepsilon = \frac{|I_1 - I_2|}{2} > 0$.

Тогда $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.е. $\forall V$ -разм. разбиение $\Delta_v < \delta$:

$$|\sigma(v) - I_j| < \varepsilon/2, j=1,2. \text{ Пусть } \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}. \text{ Тогда}$$

$$|I_1 - I_2| \leq |I_1 - \sigma(v)| + |\sigma(v) - I_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon = \frac{|I_1 - I_2|}{2} \text{ (?) т.е.}$$

$\uparrow$
 $\Delta_v < \delta$

Т.1 (необходимое условие интегр-ти). Пусть f отр-на на σ_a, σ_b .

Если $f \in R[\sigma_a, \sigma_b]$, то она отр-на на этом отрезке.

Д-во: Пусть функ-ия f не отр-на на σ_a, σ_b . Покажем, что

тогда $f \notin R[\sigma_a, \sigma_b]$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - произ-ое разбиение
 σ_a, σ_b . f не отр-на на $\sigma_a, \sigma_b \Rightarrow \exists z \in \{1, \dots, n\}$, т.е. f не отр-на

на $[x_{z-1}, x_z]$. Значит выберем произ-ым образом точки

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k=1, \dots, n, k \neq z. \text{ Обозначим через } A = \left| \sum_{k=1, k \neq z}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \right|$$

Поскольку f не отр-на на $[x_{z-1}, x_z]$, то $\forall M > 0$

$$\exists \xi_z \in [x_{z-1}, x_z], \text{ т.е. } |f(\xi_z)| > \frac{MA}{\Delta x_z}. \text{ Возьмем } V = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

$\xi_1, \dots, \xi_n$ - размешенное разбиение отр-ки σ_a, σ_b . При этом

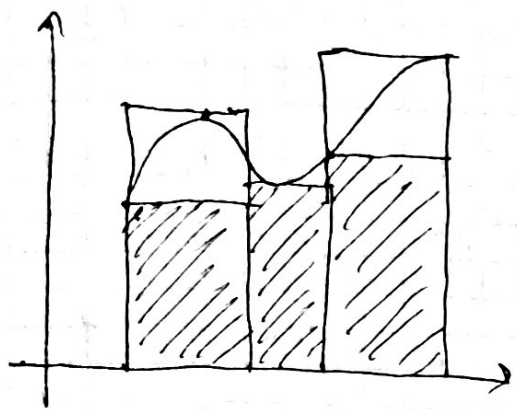
$$|\sigma(v)| = \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k + f(\xi_z) \cdot \Delta x_z \right| \geq |f(\xi_z) \cdot \Delta x_z| - A > \frac{M+A}{\Delta x_z} \cdot \Delta x_z - A = M.$$

$|\sigma(v)| \geq |A| - M$

Значит, $\forall M > 0 \forall V$ -разб-ие $\sigma_a, \sigma_b \exists$ отс-е раз-ое разбиение

$V: |\sigma(v)| > M$. Значит, не $\exists$ числа $I \in \mathbb{R}$, зад-ые отр-ки b . $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f \notin R[\sigma_a, \sigma_b].$$



Пусть теперь f опр-на.

Обозначим $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$;

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x), \quad m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$$

Суп $\neq$ Держней (нижней) суммой

Дадём для ф-ции f на $[a, b]$,
соот-й раз-ию T , наз-се величина $S(T) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k$

$$(s(T) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k).$$

Помогина $M_k - m_k = \omega_k$ наз-се колебанием функции f на $[x_{k-1}, x_k]$.

Впр. 8 Верхним (нижним) интегралом Дарбу для функции f на $[a, b]$ наз-се величина $I^* = \inf\{S(T)\}$ ($I_* = \sup\{s(T)\}$), где точные грани берутся по всем разбиениям T отрезка $[a, b]$.
Лемма 1 (критерий Римана интегр-ти ф-ции)

Пусть f опред-на и опр-на на $[a, b]$.

$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists T$ -разбиение $[a, b]$, т.е. $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Лемма 1 Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ -разбиение $[a, b]$. Тогда V -размеченное разбиение, соот-во T :

$$s(T) \leq \sigma(V) \leq S(T).$$

Док-во: Очевидно, что $\forall k \in \{1, \dots, n\} : m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k = S(T).$$

Лемма 2 $S(T) = \sup_V \{\sigma(V)\}$, $s(T) = \inf_V \{\sigma(V)\}$, где точные грани

берутся по всем размеченным разбиениям V , соот-м разд. T .

Док-во: проведём для первой чл-е. Возьмём $\varepsilon > 0$. Т.к.

$M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, то $\exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] : f(\xi_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$, $k = 1, \dots, n$.

Получим разм-е разбиение V , соотв. разд. T ,

$$\begin{aligned} \text{примём } \sigma(V) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k > \sum_{k=1}^n (M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}) \cdot \Delta x_k = S(T) - \sum_{k=1}^n \Delta x_k \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \\ &= S(T) - \varepsilon. \text{ Из л. 1 } \Rightarrow \sigma(V) \leq S(T) \Rightarrow S(T) = \sup_V \{\sigma(V)\} \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Лемма 3 Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ γ - разбиение. τ, τ' - разбиения.
 Тогда $0 \leq S(T) - S(T') \leq (M-m) \cdot l \cdot \Delta\tau$,
 $0 \leq S(T') - S(T) \leq (M-m) \cdot l \cdot \Delta\tau$, где l - кол-во τ, τ' - разбиений
 к T при укрупнении.

Доказ. Проверим для 1-го сч.
 Пусть $T' = T \cup \{x'\}$, где $x_{k-1} < x' < x_k$ для некоего $k \in \{1, \dots, n\}$.
 Тогда γ $S(T)$ и $S(T')$ совпадают все слагаемые, кроме k -того
 $\rightarrow S(T) - S(T') = M_k \cdot \Delta x_k - \underbrace{(\sup_{x_{k-1} < x \leq x'} f(x) \cdot (x' - x_{k-1}) + \sup_{x' \leq x \leq x_k} f(x) \cdot (x_k - x'))}_{\leq M_k} \geq$

$M_k \cdot \Delta x_k - M_k (x' - x_{k-1} + x_k - x') = 0$.
 В др. случае, $S(T) - S(T') = \underbrace{M_k \cdot \Delta x_k}_{\leq M} - \underbrace{(\sup_{x_{k-1} < x \leq x'} f(x) \cdot (x' - x_{k-1}) + \sup_{x' \leq x \leq x_k} f(x) \cdot (x_k - x'))}_{\geq m} \geq$
 $\leq M \cdot \Delta x_k - m(x' - x_{k-1} + x_k - x') =$
 $= (M-m) \cdot \Delta x_k \leq (M-m) \cdot \Delta\tau$ и т.д.

Лемма 4 $\forall T_1, T_2$ - разбиений τ, τ' : $S(T_1) \leq S(T_2)$
Доказ. Пусть $T = T_1 \cup T_2$. Тогда $S(T_1) \leq S(T) \leq S(T) \leq S(T_2)$

Лемма 5 $\forall$ ф-ции f существует $\bar{I}^*$ и $\bar{I}_*$, причем
 $\bar{I}_* \leq \bar{I}^*$.

Доказ. $\forall T$ -разб. τ, τ' : $S(T) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k \geq m \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k = m(b-a) =$
 $\Rightarrow$ нижнее $\{S(T)\}$ ф-ции $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists \bar{I}_* = \inf \{S(T)\}$. Аналогично $\exists \bar{I}^* = \sup \{S(T)\}$. Докажем,
 что $\bar{I}_* \leq \bar{I}^*$. Предположим, что $\bar{I}_* > \bar{I}^*$. Возьмем $\varepsilon = \frac{\bar{I}_* - \bar{I}^*}{2} > 0$.
 Из ф-ции $\bar{I}^* \Rightarrow \exists T_1$ -разб. τ, τ' . $S(T_1) < \bar{I}^* + \varepsilon = \frac{\bar{I}_* + \bar{I}^*}{2}$.
 Аналогично, $\exists T_2$ -разб. τ, τ' . $S(T_2) > \bar{I}_* - \varepsilon = \frac{\bar{I}_* + \bar{I}^*}{2}$.
 $\Rightarrow S(T_1) < S(T_2)$ (!) л. 4 $\Rightarrow \bar{I}_* \leq \bar{I}^*$. и т.д.

Лемма 6 (основная лемма Дарбу)
 $\bar{I}^* = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} S(T)$, $\bar{I}_* = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} s(T)$; т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.е. $\forall T$ -разб.
 нек. τ, τ' , $\Delta\tau < \delta$: $|\bar{I}^* - S(T)| < \varepsilon$;
 $|s(T) - \bar{I}_*| < \varepsilon$.

Док-во: проведем где $\epsilon > 0$. Пусть $\epsilon > 0$. Из определ. $I^* \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists T^* = \{x_0^*, x_1^*, \dots, x_\ell^*\}$ - разбиение ca, bz , т.е. $0 \leq S(T^*) - I^* < \frac{\epsilon}{2}$ (*)
 Положим $\delta = \frac{\epsilon}{2(M-m)(\ell-1)} > 0$ (при этом δ зав-т только от ϵ).

Пусть T - произвольное разбиение ca, bz , $\Delta_T < \delta$. Обозначим через $T' = T \cup T^*$, тогда $0 \leq \underbrace{S(T) - S(T')}_{\substack{\uparrow \\ 1.3}} \leq \underbrace{(M-m)\Delta_T}_{\substack{\uparrow \\ 1.3}} (\ell-1) < (M-m)(\ell-1)\delta = \frac{\epsilon}{2}$ (**).

Покажем, что $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, т.е. $\forall T$ -разбиение ca, bz , $\Delta_T < \delta$:
 $0 \leq S(T) - I^* = \underbrace{(S(T) - S(T'))}_{\substack{\uparrow \\ \epsilon/2 \text{ в силу } (**)}} + \underbrace{(S(T') - I^*)}_{\substack{\uparrow \\ \text{т.к. } T' \text{ - разбиение } ca, bz \\ \text{и } T^* \text{ - разбиение } ca, bz \\ \text{и } S(T^*) - I^* < \epsilon/2 \text{ (*)}}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. $\square$

Д-во теор. 2: $\Rightarrow$ пусть $f \in R_{ca, bz}$. Возьмем $\epsilon > 0$. $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$,
 т.е. $\forall V$ -разм. разбиение $\Delta_V < \delta$: $|S(V) - I| \leq \epsilon/3$, где $I = \int_{ca}^b f(x) dx$.
 $\Rightarrow I - \frac{\epsilon}{3} < S(V) < I + \frac{\epsilon}{3}$. Поскольку $s(T) = \inf \{S(V)\}$, $S(T) = \sup \{S(V)\}$
 (лемма 2), то $\forall T$ -разб. ca, bz , $\Delta_T < \delta$: $I - \frac{\epsilon}{3} \leq s(T) \leq I + \frac{\epsilon}{3}$,
 $I - \frac{\epsilon}{3} \leq S(T) \leq I + \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow 0 \leq S(T) - s(T) \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$.

$\Leftarrow$ $\forall \epsilon > 0 \exists T$ -разб. ca, bz , т.е. $0 \leq S(T) - s(T) < \epsilon$. Поскольку
 $s(T) \leq \underbrace{I_*}_{\substack{\uparrow \\ \text{определ. 1.8}}} \leq \underbrace{I^*}_{\substack{\uparrow \\ \text{определ. 1.8}}} \leq S(T)$, то $0 \leq I^* - I_* < \epsilon$. Но I_* и I^* не зависят
 от разб-ия $\Rightarrow I_* = I^* = I$. Вспомогат. из 1.6 $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} (S(T) - s(T)) = 0$. Возьмем любое $\epsilon > 0$. $\exists \delta = \delta(\epsilon)$, т.е.
 $\forall T$ -разб. ca, bz , $\Delta_T < \delta$: $0 \leq S(T) - s(T) < \epsilon$.

Обозначим $I = I_* = I^*$. Покажем, что $s(T) \leq I \leq S(T)$,
 $s(T) \leq \underbrace{\sigma(V)}_{\substack{\uparrow \\ \text{лемма 4}}} \leq S(T) \forall V$ -разм. разб-е, соответ. разб. T .

Значит, $\forall V$ -разм. разб., $\Delta_V < \delta$: $|S(V) - I| \leq S(T) - s(T) < \epsilon \Rightarrow$
 $\Rightarrow f \in R_{ca, bz}$ з.т.о.

Следствие Пусть f определена и ограничена на ca, bz .

$f \in R_{ca, bz} \Leftrightarrow I^* = I_* (= I)$. Док-во вытекает непосредственно из з-ва теоремы.

Пример Пусть $f(x) = c \quad \forall x \in [a, b]$. Тогда f равномерно δ -разбита: $S(T) - s(T) = c \cdot (b-a) \Rightarrow f \in R[a, b]$.

2) $S(T) = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ 1, & x = a \end{cases} \in R[a, b]$. Действительно, $\forall T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разб. $[a, b]$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$. $M_k = 1, m_k = 0$ (т.к.

на любом отрезке есть как разб. так и н.р.р. точки).

Значит, $\forall$ разб. T : $S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \cdot \Delta x_k = b-a$.

§2. Классы интегрир. функций

Т.1 Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда $f \in R[a, b]$

Доказ. $f \in C[a, b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.е. $\forall x', x'' \in [a, b]$, $|x' - x''| < \delta$:

$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Пусть T - разб. $[a, b]$, $\Delta x_k < \delta$. Тогда

$$S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (f(\xi_k) - f(\eta_k)) \cdot \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon$$

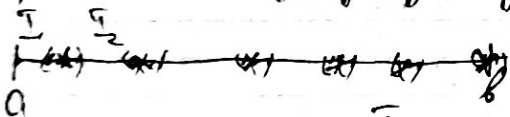
$< \frac{\varepsilon}{b-a}$

$\Rightarrow f \in R[a, b]$.

Т.2 Пусть f определена и ограничена на $[a, b]$.

Пусть $\forall \varepsilon > 0$ все точки разрыва f на $[a, b]$ можно покрыть конечным числом интервалов с суммой длин $< \varepsilon$. Тогда $f \in R[a, b]$.

Доказ. Пусть $\forall \varepsilon > 0$ все точки разрыва f на $[a, b]$ покрыты конечным числом интервалов (x_j', x_j'') $\sum_{j=1}^l (x_j'' - x_j') < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ (если $m=M$, то $f = \text{const} \Rightarrow f \in R[a, b]$).



Рассмотрим число $I = [a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^l (x_j', x_j'')$.

Очевидно, что $I = \bigcup_{j=1}^z I_j$, $z \leq l+1$, I_j - отрезки. На каждом из отрезков

I_j ф-ция f непрерывна $\Rightarrow$ равн. непрерывна. Значит $\exists \delta_j = \delta_j(\varepsilon) > 0$, т.е.

$\forall x', x'' \in I_j$, $|x' - x''| < \delta_j$: $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, $j = 1, 2, \dots, z$. Обозначим $\delta = \min_{j \in \{1, \dots, z\}} \{\delta_j\}$; пусть T_j - разбиение отрезка I_j , $\Delta T_j < \delta$, $j = 1, \dots, z$.

Пусть $T = \bigcup_{j=1}^z T_j$, тогда T - разбиение $[a, b]$, $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

при некоторой добавим к Т точки a, b .
 Тогда $S(T) - S(\bar{T}) = \sum_{\substack{[x_{k-1}, x_k] \in \\ \mathcal{V}_j}} (M_k - m_k) \Delta x_k + \sum_{\substack{[x_{k-1}, x_k] \in \\ \mathcal{V}_j}} (M_k - m_k) \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{2(M-m)} + (M-m) \sum_{j=1}^l (x_j'' - x_j') < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + (M-m) \frac{\varepsilon}{2(M-m)} = \varepsilon. \Rightarrow f \in R[a, b]$ и т.д.

Следствие Если f огранич. на $[a, b]$ и имеет конечное число разрывов, то $f \in R[a, b]$.

- Missing Lecture II -

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Лемма Если функ-я f определена в т. a , то по определению положим $\int_a^a f(x) dx = 0$. Если $a < b$ и $f \in R[a, b]$, то по определению $\int_a^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.

Лемма Пусть $f \in R[a, b]$; $a, b, c \in [a, b]$. Тогда, это $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = 0$.

6) Пусть $f \in R[a, b]$, если $f(x) \geq 0$ (≤ 0) $\forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ (≤ 0).

Доказательство: Пусть $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. Тогда $\mathcal{V} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a, b]$: $m_k \geq 0 \forall k = 1, \dots, n$. Значит $S(\mathcal{V}) \geq 0 \forall \mathcal{V}$. Поскольку $S(\mathcal{V}) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(\bar{\mathcal{V}})$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. и т.д.

7) Пусть $f, g \in R[a, b]$. Если $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$. Доказательство: $f(x) - g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0$. и т.д.

8) Пусть $f \in R[a, b], f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. Если f непрерывна в т. $x_0 \in [a, b]$ и $f(x_0) > 0$ (< 0), то $\int_a^b f(x) dx > 0$ (< 0).

Доказательство: Пусть $f(x) \geq 0, a \leq x \leq b; f(x_0) > 0$; f непрерывна в т. x_0 . Тогда по теореме о сопр. знаке $\exists \delta > 0$, т.е. $f(x) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$. Рассмотрим вспомогательную ф-цию

$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2}, & c \leq x \leq d \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, Тогда очевидно, что $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$.

Значит, $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \frac{f(a)}{2}(b-a) > 0$ з.г.

9) Если $f \in C[a, b]$, $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$ и $\int_a^b f(x) dx = 0$, то $f(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$. Д-во: если $\exists x_0 \in [a, b]$, т.е. $f(x_0) > 0$, то $\int_a^b f(x) dx > 0$ (п.8). з.г.

Пример: возьмем $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$, а $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Например, $f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{2} \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \{\frac{1}{2}\} \end{cases}$. Далее покажем, $\int_a^b f(x) dx = 0$. $R(x)$ - гр. Римана.

10) Если f и $g \in R[a, b]$, то $|f| \in R[a, b]$ и

$$|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Док-во: заметим, что $|f| \in \text{Lip } C, M$.

$$\forall y_1, y_2 \in C, M: |y_1 - y_2| \leq |y_1| + |y_2|. |y_1 - y_2| \geq |y_1| - |y_2| = (y_1 - y_2) + y_2 - |y_2|$$

$$|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1| \geq |y_2| - |y_1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y_1| - |y_2| \leq |y_1 - y_2|. \text{ Далее, } f \in R[a, b] \Rightarrow |f| \in R[a, b] \text{ как сложение.}$$

Поскольку $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, $\forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b -|f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$

$$\Rightarrow |\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx \text{ з.г.} \quad - \int_a^b |f(x)| dx \quad (c)$$

Пример: из того, что $|f| \in R[a, b]$, не следует, вообще говоря, что $f \in R[a, b]$. Например, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Перейдем к изучению теор. о сред. значен.

Пусть $f, g \in R[a, b]$; $g(x) \geq 0$ (≤ 0) $\forall x \in [a, b]$. Обозначим $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$

Тогда $\exists \mu \in C, M$, т.е. $\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \cdot \int_a^b g(x) dx$ (1).

$$m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$$

Если к тому же $f \in C[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \quad (2).$$

Док-во: достаточно провести две оценки $g(x) \geq 0$. $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a, b]$.

$$\Rightarrow m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x) \Rightarrow m \cdot \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \cdot \int_a^b g(x) dx \quad (*).$$

Если $\int_a^b g(x) dx = 0$, то из (*) $\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) dx = 0 \Rightarrow$ з.г. (и) вил. $\forall \mu$.

Поскольку $g(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, то $\int_a^b g(x) dx \geq 0$. Если $\int_a^b g(x) dx \neq 0$, то

$\int_a^b g(x) dx > 0$, и можем разделить пер-во (*) на этот интеграл.

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M \Rightarrow \text{получаем раб-во (1).}$$

Равенство сл-т из (1) и т. о. промежу.

непр. ф-ии через правые нп. зм. з.г.

Следствие Если $f \in R[a, b]$, то $\exists \mu \in m, M$, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a) \quad (1')$$

Если к тому же, $f \in C[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b]$, т.е. $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$.

Док-во: (1') и (2') аб-це частными случаями формулы (1) и (2)

при $g(x) = 1, \forall x \in [a, b]$ з.г.

Опр. 2 Число $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ наз-е интегральным средним значением ф-ции f на $[a, b]$.

Опр. 3 Пусть $f \in R[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$. Функцию $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$, аск-е наз-е интегралом с переменным верхним пределом от ф-ции f на $[a, b]$.

П. 2 Ф-ция $F \in C[a, b]$.

Док-во: Пусть $x \in [a, b]$, $\Delta x \in \mathbb{R}$, т.е. $x + \Delta x \in [a, b]$. Тогда $|F(x + \Delta x) - F(x)| = \left| \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right| \leq \int_x^{x+\Delta x} |f(t)| dt \leq \sup_{x \leq t \leq x+\Delta x} |f(t)| \cdot |\Delta x| \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0. \Rightarrow F \in C[a, b]$

П. 3 Если ф-ция f непр-на в т. $\xi \in [a, b]$, то F гл-ма в т. ξ и $F'(\xi) = f(\xi)$.

Д-во: Возьмём $\varepsilon > 0$. Ф-ция f непр-на в т. $\xi \Rightarrow \exists \delta > 0$, т.е.

$\forall t \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap [a, b] : |f(\xi) - f(t)| < \varepsilon$. Пусть $\xi \neq b$. Тогда $\exists h \in (0, \delta)$, т.е. $[\xi, \xi + h] \subset [a, b]$ и $|f(\xi) - f(t)| < \varepsilon \forall t \in [\xi, \xi + h]$. Пусть $0 < \Delta x < h$:

$$f(\xi) - \varepsilon < f\left(\frac{\xi}{2}\right) < f\left(\frac{\xi}{2}\right) + \varepsilon \Rightarrow \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} (f(\xi) - \varepsilon) dt \leq \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} f(t) dt \leq \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} (f(\xi) + \varepsilon) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f(\xi) - \varepsilon) \Delta x \leq F(\xi + \Delta x) - F(\xi) \leq (f(\xi) + \varepsilon) \cdot \Delta x, \Rightarrow$$

$$f(\xi) - \varepsilon \leq \frac{F(\xi + \Delta x) - F(\xi)}{\Delta x} \leq f(\xi) + \varepsilon. \text{ Значит, } \forall \varepsilon > 0 \exists h > 0, \text{ т.е.}$$

$$\forall \Delta x \in (0, h) : \left| \frac{F(\xi + \Delta x) - F(\xi)}{\Delta x} - f(\xi) \right| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(\xi + \Delta x) - F(\xi)}{\Delta x} = f(\xi)$$

Аналогично, для $\Delta x < 0$ при $\xi \neq a$ $\exists h \in (0, \delta) : (\xi - h, \xi] \subset [a, b]$. Возьмём

$$\Delta x \in (-h, 0) \Rightarrow \int_{\xi+\Delta x}^{\xi} (f(\xi) - \varepsilon) dt \leq \int_{\xi+\Delta x}^{\xi} f(t) dt \leq \int_{\xi+\Delta x}^{\xi} (f(\xi) + \varepsilon) dt.$$

$$\Rightarrow (f(\xi) - \varepsilon)(-\Delta x) \leq F(\xi) - F(\xi + \Delta x) \leq (f(\xi) + \varepsilon)(-\Delta x) \quad | : (-\Delta x) > 0$$

$$f(\xi) - \varepsilon \leq \frac{F(\xi) - F(\xi + \Delta x)}{-\Delta x} \leq f(\xi) + \varepsilon \Rightarrow F'(\xi) = f(\xi) \text{ з.т.з.}$$

Лемма Если $f \in C[a, b]$; $x_0 \in [a, b]$, то ф-ция $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$

явл-ся первообр. для f на $[a, b]$.

Д-во: $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow F$ -первообр. для f на $[a, b]$ з.т.з.

Теорема Ньютона-Лейбница

Пусть $f \in C[a, b]$. Если $F(x)$ - любая из первообразных для f

на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$.

Д-во: Обозначим $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, тогда F -первообр. для f на

$[a, b]$. Если Φ - какая-либо первообр. для f на $[a, b]$, то

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad a \leq x \leq b. \text{ Тогда } \int_a^b f(x) dx = F(b) - \underbrace{F(a)}_{=0} = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Замечание Интегрируемость и наличие первообразной, вообще говоря, не эквивалентны. Например, 1) ф-ция $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

интегр-на на $[-1, 1]$, т.к. ф-ция имеет 1 т. разрыва.

Если $\exists F(x)$, т.е. $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [-1, 1]$. $F'(x)$ - может иметь там

разрыв 2-го рода $\Rightarrow \perp$. Значит, f не имеет первообр-ой на $[-1, 1]$.

$$2) F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & -1 \leq x \leq 1, x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x^2} = 0.$$

$$F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} + x^2 \cos \frac{1}{x^2} \left(-\frac{2}{x^3}\right) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}. \text{ Значит, ф-ция } f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет первообразную ф-цию $F(x)$, но $f \notin R[-1, 1]$, т.к. $f(x)$ - неогр-на, поскольку не явл-ся огр-ой в окрестности $x=0$.

Т.5 (значение переменных в стр. интеграле).

1. Пусть $\varphi: [a, b] \rightarrow [a, b]$; $\varphi \in C^1[a, b]$; $\varphi(a) = \min_{a \leq t \leq b} \varphi(t) = a$; $\varphi(b) = \max_{a \leq t \leq b} \varphi(t)$

f стр-на и непрерывна на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Д-во: Пусть F -первообр. для

f на $[a, b]$. Заметим, что ф-ция $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ непрерывна на $[a, b]$ и

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

по цепному правилу

для функции Коши-Лежандра $\int_a^b f(x(t)) \cdot x'(t) dt = F(x(b)) - F(x(a)) =$
 $= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$ т.е.

Пример $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ dx = 2t dt \\ x=0 \Leftrightarrow t=1 \\ x=1 \Leftrightarrow t=\sqrt{2} \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t} \cdot 2t dt = 2 \cdot t \Big|_1^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1).$

7.6 (интегрирование по частям в двойном интеграле).

Пусть $f, g \in C^1[a, b]$, тогда $\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx$.

2-й: Пусть $f(x) \cdot g(x)$ - непрерыв. где $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ на $[a, b] \Rightarrow$
 $\Rightarrow \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ т.е.

Пример $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} f(x)=x \\ f'(x)=1 \end{array} \right| \begin{array}{l} g(x)=\sin x \\ g'(x)=\cos x \end{array} = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

7.7 Пусть $f, g \in R[a, b]$, если

1) $f(x) \geq 0, a \leq x \leq b$, и не возрастает, то

$$\exists \xi \in [a, b], \text{ т.е. } \int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \cdot \int_a^b g(x) dx$$

2) $f(x) \geq 0, a \leq x \leq b$ и не убывает, то

$$\exists \xi \in [a, b]: \int_a^b f(x)g(x) dx = f(b) \cdot \int_a^b g(x) dx;$$

3) $f(x)$ монотонна на $[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b]$:

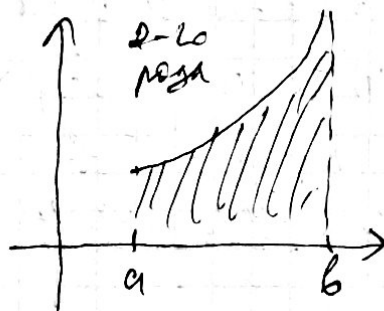
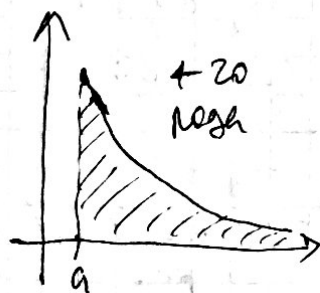
$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \cdot \int_a^{\xi} g(x) dx + f(b) \cdot \int_{\xi}^b g(x) dx$$

Пример $\int_1^A \frac{\sin x}{x} dx, A > 1$. Оценим его. $\frac{1}{x} > 0$ и $\forall x \in [1; A] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \int_1^A \frac{\sin x}{x} dx \right| = \frac{1}{1} \left| \int_1^{\xi} \sin x dx \right| \leq 2 \quad \forall A > 1.$$

$\cos 1 - \cos \xi$

39. Несобственный интеграл.



Опр. 1 Пусть f — чл. f опред-на на $[a, +\infty)$ и $f \in R[a, b] \forall A > a$.
Необходимый интеграл 1-го рода от фун-ции f на промежутке $[a, +\infty)$ наз-е выражение $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$.

Обозначение: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Если предл $\exists$ конечн, то говорят, что интеграл сходится; иначе — расходится.

Пример $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln A = +\infty \Rightarrow$ интеграл рас-е.

« $\ln|x|$ » — короткая запись.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \text{инт-л сходится и равен 1.}$$

Аналогично, $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx$, если f опред-на на $(-\infty, a]$ и $f \in R[A, a] \forall A < a$.

По опр. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx \forall a \in \mathbb{R}$, если f опред-на на $\mathbb{R}$ и $f \in R[-A; A] \forall A > 0$.

$$\left(\int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx \right).$$

При этом интеграл в левой части (+) сход-е $\Leftrightarrow$ сходится оба интегр-ла в правой части.

Т.1 (замена переменной в несобств. интегр-ле 1-го рода) Пусть

~~Пусть~~ 1) f опред-на и непрерывна на $[a, +\infty)$;

2) φ опред-на и $\varphi \in C'([a, +\infty))$ (или $(-\infty, a])$;

3) φ строго монотонна на $[a, +\infty)$ (или на $(-\infty, a]$) и

$\varphi(t) \rightarrow +\infty; t \rightarrow +\infty (-\infty)$;

4) $\varphi(a) = a$. Тогда $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$ ($= - \int_{-\infty}^a f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$).

причем инт-л в обеих частях сход-е и расх-е одновременно.

Д-во: Пусть $A > a$. Из условий 3), 4) теоремы $\Rightarrow \exists \beta > a$ (или $\beta < a$), т.е. $\varphi(\beta) = A$.

Применим теорему о замене переменной в

определённом инт-ле: $\int_a^A f(x) dx = \int_a^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \left(- \int_\beta^a f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right)$

В силу условия 3): $A \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \beta \rightarrow +\infty$ (или $\beta \rightarrow -\infty$). Значит, можем перейти к пределу в обеих частях последнего равенства:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad \text{т.г.})$$

Пример $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ x = t^2 - 1 \\ x-1 = t^2 - 2 \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow t \rightarrow -\infty \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t dt}{t^3} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = -\frac{2}{t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{0} - \frac{2}{0} = -\infty.$

Т.2 (интегр-ты по частям в несоб. инт-ле)

Пусть $f, g \in C[a, +\infty)$ и существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = L$. Тогда инт-лы $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x) dx$ сходятся и расходятся одновременно и в случае сходимости: $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x) dx = L - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x) dx$

Доказ-во: Возьмем $A > a$ и применим теорему об инт-ле по частям в определенном инт-ле: $\int_a^A f(x)g'(x) dx = f(A)g(A) - f(a)g(a) - \int_a^A f'(x)g(x) dx$ — значит, инт-лы в левой и правой части

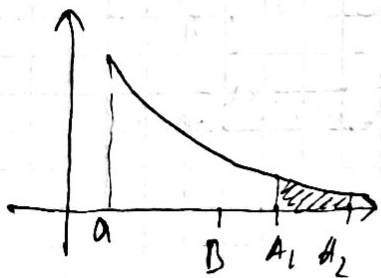
сходятся и расходятся одновременно, перейдем к пределу при $A \rightarrow +\infty$, получим изв-е теоремы т.г.

Пример $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = - \int_0^{+\infty} \sin x d e^{-x} = - \sin x e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} d \sin x = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx = \int_0^{+\infty} \cos x d(e^{-x}) = - \cos x \cdot e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} d \cos x = - \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = + \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = + \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2}.$

Почему $\frac{1}{2}$ — это число?

Т.3 (критерий Коши сходим. несобств. интеграла 1-го рода).

Пусть $f \in R[a, A]$, $\forall A > a$. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B = B(\varepsilon) > a$, т.е. $\forall A_1, A_2 > B: \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$.



Доказ-во: Обозначим $F(A) = \int_a^A f(x) dx$. Функция $F(A)$ имеет конечный предел при $A \rightarrow +\infty$

$\Leftrightarrow$ она удовлетв-т усл-ю Коши при $A \rightarrow +\infty$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \exists B > a$, т.е. $\forall A_1, A_2 \in B_B(+\infty) = (B, +\infty):$

$$|F(A_2) - F(A_1)| < \varepsilon. \quad \text{т.г.}$$

Пример $I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \alpha \leq 0$. Покажем, что при $\alpha \leq 0$ $I(x)$ рас-се. $\exists \varepsilon = 1$, т.е. $\forall B > 1 \exists A_{1n} = 2\pi n, A_{2n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, т.е. $A_{2n} > A_{1n} > B, (n \in \mathbb{N})$. $\left| \int_{A_{1n}}^{A_{2n}} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| \geq \frac{1}{(2\pi n)^\alpha} \cdot \int_{2\pi n}^{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_{2\pi n}^{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} = 1 = \varepsilon. \quad \text{т.г.}$

7.4 (признак сравнения)

Пусть $f \in R[a, A]$, $\forall A > a$. Если

- 1) $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ с.с., то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ с.с.-с.
- 2) $0 \leq g(x) - f(x) \quad \forall x \geq a$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ расх.-с., то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ рас.-с.

Д-во:

Возьмем $\varepsilon > 0$. Поскольку $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ с.с.-с., то $\exists B > a$, т.е. $\forall A_1, A_2$, $B < A_1 < A_2$: $|\int_{A_1}^{A_2} f(x) dx| \leq \int_{A_1}^{A_2} |f(x)| dx \leq \int_{A_1}^{A_2} g(x) dx < \varepsilon$. Значит $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ с.с.-с. по кр. Коши.

2) Предположим, что $0 \leq g(x) \leq f(x)$, и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ с.с.-с. Тогда $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ с.с.-с. (н.и.)?! В уел-ии $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$ рас.-с. ст.г.

Пример $\int_a^{+\infty} \sin x \cdot e^{-x} dx$. Очевидно, что $|f(x)| \leq e^{-x}$, $\forall x \geq 0$;

$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$. $\Rightarrow \int$ также с.с.-с.

Следствие Пусть $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq a$; $f \in R[a, A]$, $\forall A > a$,
 $g(x) \geq 0$; $g \in R[a, A]$

Если $\exists c > 0$, т.е. $f(x) \sim c \cdot g(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, тогда интегралы $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ с.с.-с. и расх.-с. одновременно.

Доказ-во: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0 \Rightarrow \exists b > a$, т.е. $0 \leq f(x) \leq (c+1)g(x) \quad \forall x \in (b, +\infty)$.

$\Rightarrow$ из с.с.-ти $\int_b^{+\infty} g(x) dx$ следует с.с.-ти инт-ла $\int_b^{+\infty} f(x) dx$. Аналогично $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{c} \neq 0 \Rightarrow$ из с.с.-ти $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ следует с.с.-ти $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ ст.г.

Пример Исслед. на с.с.-ть $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x^2 + 11}}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x^2 + 11}} \sim \frac{1}{2x^2}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2} dx = -\frac{1}{2x} \Big|_1^{+\infty} =$$

$= \frac{1}{2} \Rightarrow$ исходн. интеграл с.с.-с.

Замечание Часто применяется признак сравнения со степенями:

Пусть $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq a$ и $f \in R[a, A]$, $\forall A > a$. Пусть $f(x) \sim \frac{c}{x^\alpha}$, $c > 0$.

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ с.с.-с. $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

17 (признак Абеля - Дирхле) Пусть

- 1) $f \in C[a; +\infty)$ и $\exists c > 0$, т.е. $\forall A \geq a: \left| \int_a^A f(x) dx \right| \leq c$;
- 2) $g \in C^1[a; +\infty)$;
- 3) $g(x)$ монотонна и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходя-ся.

Док-во: Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть g не воз-ет, тогда $\exists A(\varepsilon) > a$, т.е.

$$\forall x \in (A; +\infty): 0 \leq g(x) \leq \varepsilon/c. \text{ Тогда } \forall A_1, A_2, A_1 < A_2: \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx \right| = \\ = \left| \int_{A_1}^{A_2} g(x)df(x) \right| \stackrel{\text{по формуле интегрирования по частям}}{=} \left| F(A_2)g(A_2) - F(A_1)g(A_1) - \int_{A_1}^{A_2} F(x)g'(x)dx \right| \leq |F(A_2)g(A_2) - F(A_1)g(A_1)| \\ + \left| \int_{A_1}^{A_2} F(x)g'(x)dx \right| \leq c \cdot (g(A_1) + g(A_2)) + |F(\xi)| \cdot \int_{A_1}^{A_2} |g'(x)|dx = c(g(A_1) + g(A_2)) + |F(\xi)| \cdot (g(A_1) - g(A_2)) \\ \leq c \cdot (g(A_1) + g(A_2)) + c(g(A_1) - g(A_2)) < \varepsilon \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходя-ся по признаку Дирхле.}$$

Пример $I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$, 1) $\alpha > 1$ $\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha} \forall x \in [1; +\infty)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \left. \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right|_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1} \Rightarrow I(x) \text{ сходя-ся абсолютно при } \alpha > 1.$$

2) $0 < \alpha \leq 1$. $f(x) = \sin x$ имеет о.р. первообр-ю; $g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \rightarrow 0$ монотонно при $\alpha > 0$. Значит, $I(x)$ сходя-ся по признаку Дирхле.

$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}$; $f(x) = \cos 2x$ имеет о.р. первообр.

$$g(x) = -\frac{1}{2x} \rightarrow 0 \text{ монотонно } \Rightarrow \int_1^{+\infty} -\frac{\cos 2x}{2x} dx$$

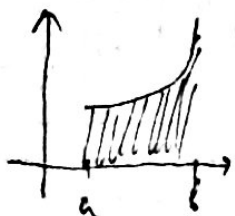
сходя-ся по пр. Дирхле.

Но $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^\alpha}$ расходя-ся при $0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x^\alpha} dx$ расходя-ся $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$ расходя-ся при $0 < \alpha \leq 1$. Ответ: $I(x)$ рас-е при $\alpha > 0$; сходя-ся абсолютно при $\alpha > 1$.

Зам. З-то $\int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx$ сходя-ся (хотя $\sin(x^2) \not\rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$).

Пр. 3



Пусть f оп-на на $[a, b]$, $f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in (0, b-a)$ и $f \notin R[a, b]$ (не оп-на в аср-ти τ, b).

Рассмотрим интеграл 2-го рода от ф-ции f на $[a, b]$ наз-е $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$.

Точка в кз-е особая. Если предел сум-т и конечен, то обрат, то интеграл сход-ся, иначе - расход-ся. На практике:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_0^1, & \alpha \neq 1 \\ \ln|x| \Big|_0^1, & \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{сход-ся} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Аналогично, если a -особая т., то $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$

Если особая т. $c \in (a, b)$, то $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx +$

При этом инт-л сход-ся $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ сум-т оба предела в правой части.

Пример $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2(1-x)(1+x^2)} dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^{+\infty} f(x) dx = I_1 + I_2 + I_3$

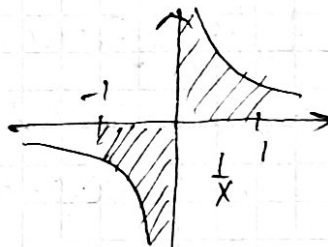
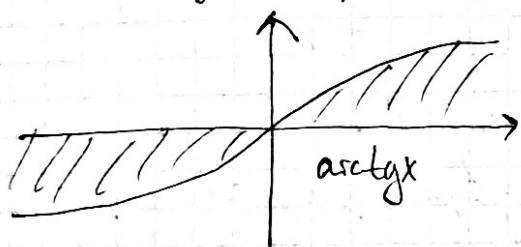
Особые точки: $x=0, x=1, x=+\infty$.

$I_1: f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, $\frac{2}{2} < 1 \Rightarrow I_1$ сход-ся, $I_2: f(x) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x)^3}$, $\frac{3}{3} < 1 \Rightarrow I_2$ сход-ся

Аналогично I_3 сход-ся. $I_4: f(x) \sim \frac{1}{x^3}$, $3 > 1 \Rightarrow I_4$ сход-ся.

Ответ: исходный интеграл сход-ся.

Замечание: Интеграл 2-го рода $\int_a^b f(x) dx$, где b -особая т., сводится к инт-лу 1-го рода заменой $t = \frac{1}{b-x}$.



Впр 4 Главным значением несобств. инт-ла 1-го рода кз-ся
всп-е: $V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_{-A}^A f(x) dx \right)$.

Например Если $f(-x) = -f(x)$, то $V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_{-A}^A f(x) dx + \int_A^A f(x) dx \right) =$
 $= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\int_0^A f(-t) dt + \int_0^A f(t) dt \right) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\int_0^A f(t) dt + \int_0^A f(t) dt \right) = 0$.

Впр Главным значением несобств. ~~р-а~~ инт-ла 2-го рода кз-ся $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$, $c \in (a, b)$ - особая т.

Например, $V.p. \int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^2 \right) =$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (v_{n-1} \varepsilon - v_{n-1} + v_{n-2} - v_{n-2} \varepsilon) = v_{n-2}.$$

35. Длина дуги кривой

Опр. 1 Пиской кривой наз-ся мн-во $L = \{(x, y) \mid x = \varphi(t), y = \psi(t), a \leq t \leq b, \varphi, \psi \in C^1[a, b]\}$.

Опр. 2 Т. (x', y') наз-ся кратной т. кривой L ,

$\chi(x', y')$ если $\exists t_1, t_2 \in [a, b], t_1 \neq t_2 : \begin{cases} \varphi(t_1) = \varphi(t_2) = x' \\ \psi(t_1) = \psi(t_2) = y' \end{cases}$.

Т. не яв-ся кратными наз-ся простыми.

Опр. 3 Кривая наз-ся простой, если у неї нет кратных т., кроме, возможно начала и конца. Если единств. крестней

т. кривой яв-ся т. $(x', y') : \begin{cases} \varphi(t) = \varphi(t') = x' \\ \psi(t) = \psi(t') = y' \end{cases}$, то кривая наз-ся простой замкнутой.

Кривые L наз-ся параметрич.,

если $\exists T = \{t_0, \dots, t_n\}$ - разби-е от-ка $[a, b]$, т.е. на каждом из отрезков $[t_{k-1}, t_k], k=1, \dots, n$, ф-ции φ и ψ зад-ют простую кривую.

В дальнейшем рассматриваем только параметр-е кривые.

Опр. 4 Фун-я $f(t)$ наз-ся кусочно-линейной на $[a, b]$, если, $f \in C[a, b]$ и $\exists T = \{t_0, \dots, t_n\}$ - разбиение $[a, b]$, т.е.

$$f(t) = a_k t + b_k, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad k=1, \dots, n; \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

Множество L наз-ся параметр-ю кривой, заданную кусочно-линейными ф-циями.

Множество L состоит из отрезков $A_{k-1}A_k$, концы отрезков - вершины (узлы) мощности.

Пусть $L = A_0A_1 \dots A_n$ - мощность; $A_k(x_k, y_k), k=0, \dots, n$. Тогда длина

$$L$$
 - это величина $|L| = \sum_{k=1}^n |A_{k-1}A_k| = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$.

Опр. 5 Будем говорить, что мощность L вписана в кривую $L = \{(x, y) \mid x = \varphi(t), y = \psi(t), a \leq t \leq b\}$, если $\exists T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ - разбиение $[a, b]$ т.е., $L = A_0A_1 \dots A_n$; $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k)), k=0, 1, \dots, n$.



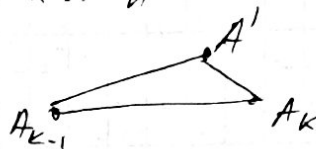
Будем говорить, что L состоит из рез-ов т.

кривая L называется спрямляемой, если мн-во дуги всех ломаных, вписанных в L , ограничено сверху. Длиной спрямляемой кривой L называется величина $|L| = \sup |l|$, где $\sup$ берётся по всем ломанным l , вписанным в L .

Лемма 1 Пусть ломаные l и l' вписаны в кривую L , l состоит из разбиения T , l' — разбиения T' . Если $T \subset T'$, то $|l| \leq |l'|$.

Д-во: Пусть $l = A_0 A_1 \dots A_n$; $l' = A_0 A_1 \dots A_k A'_k \dots A_n$
соединим A_{k-1} и A'_k отрезком $A_{k-1} A'_k$

$$\text{Тогда } |l'| - |l| = |A_{k-1} A'_k| + |A'_k A_k| - |A_{k-1} A_k| \geq 0$$



т.е.

Лемма 2 $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}| \leq |b-c| \quad (*)$$

Д-во: Если $b=c$, то очевидно. Иначе, $|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}| = \frac{|b^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2}} =$
 $= \frac{|b-c||b+c|}{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2}} \leq \frac{|b-c||b+c|}{|b|+|c|} = |b-c|$ т.е.

Теорема 1 Пусть $L = \{(x, y) | x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$. Если ф-ии $\varphi, \psi \in C^1[\alpha, \beta]$, то кривая L спрямляема и $|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$

Следствие 1 Пусть кривая L является графиком ф-ции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если $f \in C^1[a, b]$, то L спрямляема и

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Д-во: Обозначим $\varphi(t) = t, \psi(t) = f(t)$ и применим ф-лу (1). т.е.

2) Пусть кривая L задана в полярных коор-тах: $z = z(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$. Если $z \in C^1[\alpha, \beta]$, то кривая L спрямляема и $|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(z'(\theta))^2 + (z(\theta))^2} d\theta$.

Д-во: Обозначим $\varphi(\theta) = z(\theta) \cos \theta, \psi(\theta) = z(\theta) \sin \theta$. Тогда,

$$\begin{aligned} (\varphi'(\theta))^2 + (\psi'(\theta))^2 &= (z'(\theta) \cos \theta - z(\theta) \sin \theta)^2 + (z'(\theta) \sin \theta + z(\theta) \cos \theta)^2 = \\ &= (z'(\theta))^2 \cos^2 \theta - 2z'(\theta)z(\theta) \cos \theta \sin \theta + z^2(\theta) \sin^2 \theta + (z'(\theta))^2 \sin^2 \theta + 2z'(\theta)z(\theta) \sin \theta \cos \theta + \\ &+ z^2(\theta) \cos^2 \theta = (z'(\theta))^2 + z^2(\theta) \end{aligned} \quad \text{т.е.}$$

$$\text{Т.е. } \varphi, \psi \in C^1[\alpha, \beta], \quad |L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(\theta))^2 + (\psi'(\theta))^2} d\theta$$

Док-во: Пусть $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ — произ-е раз-е $[\alpha, \beta]$, ломанная l вписана в L и состоит из раз-ов T . Тогда,

$$|l| = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2}. \quad \text{Тогда}$$

Т. Демидова $\xi_k, \eta_k \in [t_{k-1}, t_k]$.

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{(\psi'(\xi_k))^2 \cdot (\Delta t_k)^2 + (\psi'(\eta_k))^2 \cdot (\Delta t_k)^2} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{\sup_{\alpha \in [a, \beta]} (\psi'(\alpha))^2 + \sup_{\alpha \in [a, \beta]} (\psi'(\alpha))^2} \cdot \Delta t_k$$

$= C \cdot (\beta - \alpha) \Rightarrow$ ит-во для всех ломанных, вписанных в L , ограничено сверху одной конст-
кривая L спрям-ма. Докажем формулу для вычисления длины L . Возьмем $\varepsilon > 0$. Поскольку ф-ция ψ' непрерывна на $[a, \beta]$, то она равномерно непрерывна на $[a, \beta] \Rightarrow \exists \delta_1(\varepsilon) > 0$, т.е. $\forall t', t'' \in [a, \beta], |t' - t''| < \delta_1: |\psi'(t') - \psi'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}$. Обозначим,

$A = \int_a^\beta \sqrt{(\psi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$ (он существует т.к., подынтегр. ф-ция непрерывна на $[a, \beta]$). $\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, т.е. $\forall V$ -разм-е разбиение $[a, \beta]$, $\Delta_V < \delta_2: |A - \sigma_f(V)| < \varepsilon/4$ (2). Обозначим $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$; пусть

$T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ - разбиение $[a, \beta]$, $\Delta_T < \delta$. Если l вписана в L и соот-т разбиению T , то $|l| = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\psi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2} \Delta t_k$.

Пусть $V = \{t_0, t_1, \dots, t_n; \xi_1, \dots, \xi_n\}$ - разм-е разбиение $[a, \beta]$. Тогда $\Delta_V < \delta$ и $||l| - \sigma_f(V)| = \left| \sum_{k=1}^n (\sqrt{(\psi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2} - \sqrt{(\psi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2}) \Delta t_k \right|$
 $\leq \sum_{k=1}^n |\psi'(\eta_k) - \psi'(\xi_k)| \cdot \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \varepsilon/4$. Отсюда и из (2):
 $||l| - A| < \varepsilon/2$ (3).

Запомним, что из (3) верно $\forall$ ломанной l , вписанной в L и соответствующей раз-ию T , $\Delta_T < \delta$. По опр. длины кривой существует ломанная l^* , вписанная в L и соот-я разбиению T^* , т.е. $0 \leq |l| - |l^*| < \varepsilon/2$. (4). Увеличим (при необходимости) разбиение T^* : $T^* \subset T'$, $\Delta_{T'} < \delta$. Пусть l' - ломанная, вписанная в L и соот-я T' . Из леммы 1 $\Rightarrow |l^*| \leq |l'|$. Отсюда и из нер-в (3), (4) $\Rightarrow ||l| - A| \leq (|l| - |l^*|) + |l'| - A < \underbrace{(\varepsilon/2)}_{\substack{< \varepsilon/2 \text{ в силу (4)} \\ < \varepsilon/2 \text{ в силу (3), т.к. } \Delta_{T'} < \delta}} + \varepsilon/2 \leq \varepsilon$.

Поскольку $|l|$ и A - числа, не зависящие от ε , то $|l| = A$ и т.д.

§ 6. Площадь плоской области.

Опр. 1 Рассмотрим мн-во $\mathbb{R}^2$ всех точек плоскости. Каждое т. $M \in \mathbb{R}^2$ задается своими коор-инт (x, y) . ε -окрест-ю т. $M_0(x_0, y_0)$ в $\mathbb{R}^2$ наз-ся мн-во $B_\varepsilon(M_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2\}$. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$. Т. M наз-ся внутренней т. мн-ва A , если $\exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(M) \subset A$. Т. M наз-ся внешней т. мн-ва A , если $\exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(M) \subset (\mathbb{R}^2 \setminus A)$. Т. M наз-ся граничной т. мн-ва A , если она не есть ни внутренней, ни внешней, т.е. $\forall \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(M) \cap A \neq \emptyset$, $B_\varepsilon(M) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \emptyset$. Совокупность всех граничных т. мн-ва A наз-ся границей мн-ва A и обозн-ся ∂A . Мн-во $A \subset \mathbb{R}^2$ наз-ся ограниченным, если $\exists R > 0$, т.ч. $A \subset B_R(0)$.

Опр. 2 Плоской фигурой будем называть произвольное ограниченное мн-во $F \subset \mathbb{R}^2$. Простейшими будем наз-ть фигуры, состоящие из конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными осям коорд-т. Простейшая фигура P имеет площадь $S(P)$. В-ва площади простейших фигур:

- 1) $S(P) \geq 0$ (неотр.)
- 2) Если $P_1 = P_2$, то $S(P_1) = S(P_2)$ (инвар.)
- 3) Если $P_1 \subset P_2$, то $S(P_1) \leq S(P_2)$ (монотонность)
- 4) Если $P = P_1 \cup P_2$, $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, то $S(P) = S(P_1) + S(P_2)$ (аддитивность)
- 5) $S(2P) = 4S(P)$.

Хотим расширить понятие площади на произ-е фигуры.

Опр. 3 Верхней (нижней) площадью фигуры F наз-ся $S^*(F) = \inf_{Q \supset F} S(Q)$ ($S_*(F) = \sup_{P \subset F} S(P)$), где $\inf$ берется по всем простейшим фигурам Q , содержащим F ; $\sup$ - по всем простейшим фигурам P , содержащимся в F .

Замечание $S^*(F)$ существует в силу неотриц-ти $S(Q)$; $S_*(F)$ - в силу огранич-ти F . Кроме того, покажем, если $P \subset F \subset Q$, то $S(P) \leq S(Q)$, имеем: $S_*(F) \leq S^*(F)$.

Опр. 4 Фигура F наз-ся квадрируемой, если $S_*(F) = S^*(F)$.
Площадь квадрируемой фигуры $S(F) = S_*(F) = S^*(F)$.

Замечание Бывают неквадр. фигуры: пусть F состоит из всех $T(x, y)$, т.е. $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x, y \in \mathbb{Q}$. $S_*(F) = 0$ (не можем вписать никакой нетрив. прямоугольник). $S^*(F) = 1$ (не можем выкинуть «—»).

Лемма 1 Фигура F квад-ма $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P, Q$ - простейшие, т.е. $P \subset F \subset Q$ и $S(Q) - S(P) < \varepsilon$.

Д-во: $\Rightarrow$ Пусть F квад-ма, $S(F)$ - её площадь. Возьмём $\varepsilon > 0$. По опр-ю верхней площади: $\exists Q \supset F$ - простейшая, т.е. $S(Q) < S^*(F) + \frac{\varepsilon}{2} = S(F) + \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично, $\exists P \subset F$ - простейшая, т.е. $S(P) > S_*(F) - \frac{\varepsilon}{2} = S(F) - \frac{\varepsilon}{2}$. $\Rightarrow S(Q) - S(P) < \varepsilon$.

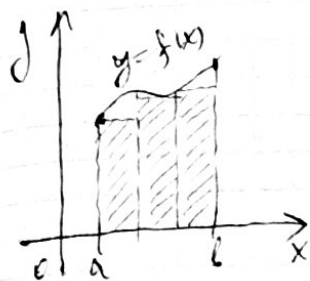
$\Leftarrow$ Возьмём произ-ое $\varepsilon > 0$. Получим, что $\exists P, Q$, т.е. $P \subset F \subset Q$ и $S(Q) - S(P) < \varepsilon$. Поскольку $S(P) \leq S_*(F) \leq S^*(F) \leq S(Q)$, то $0 \leq S^*(F) - S_*(F) < \varepsilon$. Но верх. и нижн. не зависят от выбора $\varepsilon \Rightarrow S_*(F) = S^*(F)$. з.т.д.

Лемма 2 Фигура F квад-ма $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists F_1, F_2$ - квад-рируемые, т.е. $F_1 \subset F \subset F_2$ и $S(F_2) - S(F_1) < \varepsilon$.

Д-во: $\Rightarrow$ сразу следует из леммы 1, т.к. любая простейшая фигура яв-ся квад-рой.

$\Leftarrow$ Возьмём $\varepsilon > 0$. $\exists F_1, F_2$ - квад-рые, т.е. $F_1 \subset F \subset F_2$ и $S(F_2) - S(F_1) < \varepsilon$. Согласно лемме 1, $\exists P_1, Q_1, P_2, Q_2$ - простейшие, т.е. $P_1 \subset F_1 \subset Q_1, P_2 \subset F_2 \subset Q_2$; $S(Q_1) - S(P_1) < \varepsilon/4$; $S(Q_2) - S(P_2) < \varepsilon/4$. Тогда $P_1 \subset F \subset Q_2$, P_1, Q_2 - простейшие и $S(Q_2) - S(P_1) = \underbrace{(S(Q_2) - S(P_2))}_{< \varepsilon/4} + \underbrace{(S(P_2) - S(F_1))}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{(S(F_1) - S(P_1))}_{< \varepsilon/4} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$. $\Rightarrow F$ кв-ма (н.д.) з.т.д.

Опр. 5 Криволинейной трапецией наз-ся фигура F , огран-



графиком функции $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$ ($f \in C[a, b]$, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$), применим $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox , b .

I.1 Криволинейная площадь F квадрата и $S(F) = \int_a^b f(x) dx$.

До-во: $f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$. По определению $\varepsilon > 0$.

$\overline{IT} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a, b]$, т.е. $S_f^*(T) - S_f(T) < \varepsilon$. С другой стороны, $S_f(T) = S(P)$, а $S_f(T) = S(Q)$, где $P = \bigcup_{k=1}^n P_k$, $Q = \bigcup_{k=1}^n Q_k$; P_k, Q_k - прямоугольники со сторонами $[x_{k-1}, x_k] \times [0, M_k]$, $[x_{k-1}, x_k] \times [0, M_k]$ соотв.-но. Значит, P и Q - простейшие фигуры, $P \in F \subset Q$, $S(Q) - S(P) < \varepsilon \Rightarrow$ фигура F квадрата (п.1). Далее, $S_f(T) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S_f^*(T) \Rightarrow |S(F) - \int_a^b f(x) dx| < \varepsilon$. (с-мощ-но) $\Rightarrow S(P) \leq S(F) \leq S(Q) \Rightarrow S(F) = \int_a^b f(x) dx$ - т.е.г.

Опр.6 Криволинейный сектор R называется фигурой, ар-е графиком функции $z=z(x)$, в полярных коорд. ($z \in C[a, b]$) и лучами $\varphi=a$, $\varphi=b$.



I.2 Криволинейный сектор R - квадратная фигура, при этом $S(R) = \frac{1}{2} \int_a^b z^2(x) dx$.

До-во: $\frac{1}{2} z^2 \in C[a, b] \Rightarrow$ кватр-ма на $[a, b]$.

По определению $\varepsilon > 0$. $\overline{IT} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - раз-ие $[a, b]$, т.е. $S_{\frac{1}{2}z^2}^*(T) - S_{\frac{1}{2}z^2}(T) < \varepsilon$.

С другой стороны,

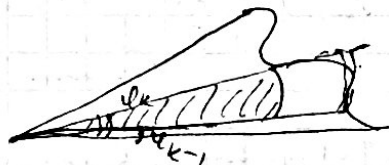
$$S(R) \neq S_{\frac{1}{2}z^2}(T) = S(P),$$

$$S_{\frac{1}{2}z^2}(T) = S(Q), \text{ где } P = \bigcup_{k=1}^n P_k, Q = \bigcup_{k=1}^n Q_k, P_k, Q_k - \text{квадратные}$$

секторы рас-ора $\Delta \varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$ и радиусов $\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} z(x)$, $\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} z(x)$ соотв.

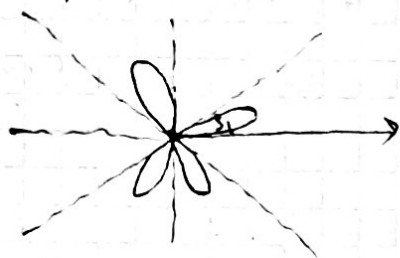
Значит, P, Q - кватр. фигуры, $P \subset R \subset Q$, $S(Q) - S(P) < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow R$ - кватр-фигура (п.2). Далее, $S_{\frac{1}{2}z^2}^*(T) \leq \frac{1}{2} \int_a^b z^2(x) dx \leq S_{\frac{1}{2}z^2}(T) \Rightarrow S(P) \leq S(R) \leq S(Q)$.



$$\Rightarrow S(R) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 d\varphi \quad \text{т.е.}$$

Пример $z = \sin 4\varphi$.



$$\sin(4\varphi) \geq 0 \Rightarrow 2\pi n \leq 4\varphi \leq \pi + 2\pi n, \quad \frac{\pi n}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$$

$$S_1 = \frac{1}{4} S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin^2 4\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 8\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} \sin 8\varphi \Big|_0^{\pi/4} \right) = \frac{\pi}{16} \Rightarrow S = \frac{\pi}{4}.$$

Уп. 1 (без г-ва) Фигура F квадр-на $\Leftrightarrow S(2F) = 0$.

§6. Объем тела в пространстве

Рассмотрим мн-во $\mathbb{R}^3$ всех точек трехмерного пр-ва:
 $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Опр. 1 ε -окрестностью т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ будем наз-ть мн-во
 $B_\varepsilon(M_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < \varepsilon^2\}$. Понятия
внутренней, внешней, граничной точек, границ мн-ва и
огран-го мн-ва в $\mathbb{R}^3$ полностью аналогичны соответ-им
понятиям в $\mathbb{R}^2$.

Опр. 2 Телом в $\mathbb{R}^3$ назовем произ-ое огран-ое мн-во $T \in \mathbb{R}^3$.
Простейшими телами будем называть конечное объеди-
 ние прямоуго-х параллелепипедов со сторонами, паралле-
 лельными осям коор-т.

Опр. 3 Верхним (нижним) объемом тела T наз-е

$$V^*(T) = \inf_{Q \supset T} V(Q) \quad (V_*(T) = \sup_{P \subset T} V(P)), \text{ где } \inf \text{ берётся по всем прост-}$$

ейшим телам, содержащим T ;

$\sup$ -по всем простейшим, содержащимся в T . Аналогично
 можно сказать: У тела T существуют $V^*(T)$ и $V_*(T)$, причём
 $V_*(T) \leq V^*(T)$.

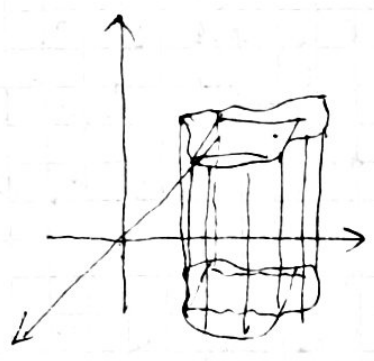
Опр. 4. Тело T кубическое, если $V^*(T) = V_*(T)$. Объёмом
кубического тела T наз-е число $V(T) = V^*(T) = V_*(T)$.

Лемма 1 Тело T кубирзуемо $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P, Q$ - простейшие тела, т.е. $P \subset T \subset Q$ и $V(Q) - V(P) < \varepsilon$.

Лемма 2 Тело T кубирзуемо $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists T_1, T_2$ - кубирзуемые тела, т.е. $T_1 \subset T \subset T_2$ и $V(T_2) - V(T_1) < \varepsilon$.

Два леммы 1 и 2 полностью аналогичные друг другу леммы 1, 2 предыдущ. параграфа.

Опр. 5



Цилиндр. телом (цилиндром)

будем называть $C = F \times [z_1, z_2]$, где F - плоская фигура, лежащая в плоскости Oxy , $[z_1, z_2]$ - отрезок оси Oz . Фигура F наз-ся основанием

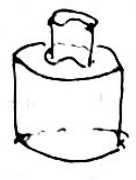
цилиндра; отрезок $[z_1, z_2]$ - образующий; $h = z_2 - z_1$ - высотой.

Т.1 Если в основании цилиндра C лежит квадратуемая фигура F , то C кубирзуемо и $V(C) = S(F) \cdot h$.

Док-во: Возьмём $\varepsilon > 0$. Фигура F квадр-ма $\Rightarrow \exists P, Q$ - простейшие фигуры, т.е. $P \subset F \subset Q$, $S(Q) - S(P) < \varepsilon/h$. Построим на P и Q цилиндры высотой h . Получим простейшие тела C_P и C_Q . По построению $C_P \subset C \subset C_Q$. При этом $V(C_P) = S(P) \cdot h$, $V(C_Q) = S(Q) \cdot h \Rightarrow V(C_Q) - V(C_P) = (S(Q) - S(P)) \cdot h < \varepsilon$. Значит, C - кубирзуемое тело (п.1). Далее, $V(C_P) \leq V(C) \leq V(C_Q) \Rightarrow S(P) \cdot h \leq S(F) \cdot h \leq S(Q) \cdot h \Rightarrow$
 $\Rightarrow |V(C) - S(F) \cdot h| < \varepsilon$

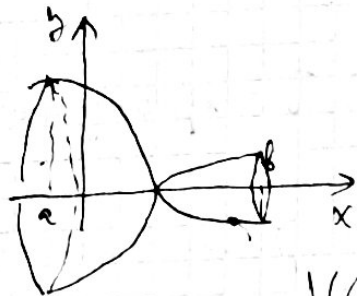
не зависит от $\varepsilon \Rightarrow V(C) = S(F) \cdot h$ з.т.д.

Следствие Пусть тело T предст-т собой конечное объединение цилиндров, 'поставленных' друг на друга (т.е. пересекаться только по основаниям). Тогда



$T = \bigcup_{k=1}^n C_k$, где C_k - цилиндры; T - кубирзуемо,
 $V(T) = \sum_{k=1}^n V(C_k)$.

I.2 (объём тела вращения)

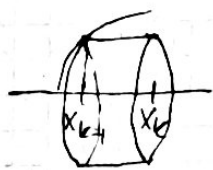


Пусть $f \in C[a, b]$. Тело T , образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, лежащей под графиком $|f(x)|$, $a \leq x \leq b$, кудеруемо, причём

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Д-во: $\pi f^2 \in C[a, b] \Rightarrow \pi f^2 \in R[a, b]$. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$\exists T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a, b]$, т.е. $\sum_{k=1}^n \pi f^2(x_k) \Delta x_k - \int_a^b \pi f^2(x) dx < \varepsilon$.



С другой стороны, $\sum_{k=1}^n \pi M_k^2 \Delta x_k \ominus$, $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} |f(x)|$

$$\ominus \sum_{k=1}^n V(P_k) = V(P), \text{ где}$$

$P = \bigcup_{k=1}^n P_k$; P_k - цилиндр с ради-

усом основание m_k и высотой Δx_k . Аналогично, $\sum_{k=1}^n \pi f^2(x_k) \Delta x_k =$

$= V(Q)$, где $Q = \bigcup_{k=1}^n Q_k$, Q_k - цилиндр с радиусом M_k и

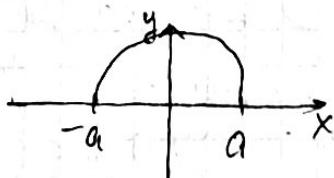
высотой Δx_k . По построению: $P \subset T \subset Q$, P, Q - кудер. (ли. в. т. и)

$V(Q) - V(P) < \varepsilon \Rightarrow T$ - кудеруемо (лемма 2).

Далее, $V(P) \leq V(T) \leq V(Q)$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \pi f^2(x_k) \Delta x_k \leq \int_a^b \pi f^2(x) dx \leq \sum_{k=1}^n \pi M_k^2 \Delta x_k \end{aligned} \right\} \Rightarrow V(T) = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad \text{т.е.}$$

Пример

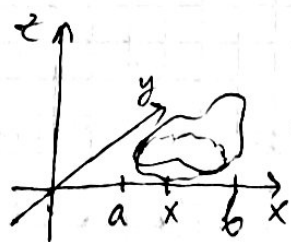


$$x^2 + y^2 = a^2, \quad f(x) = \sqrt{a^2 - x^2};$$

$$V(\text{шара}) = \pi \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \pi (a^2 x - \frac{x^3}{3}) \Big|_{-a}^a =$$

$$\frac{\pi}{3} (2a^3 - \frac{ca^3}{3}) = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

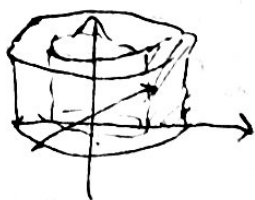
Дополнение: 1) (объём тела по известному сечению)



Если тело ограничено плоскостями

$x=a, x=b$, а при каждом $x \in [a, b]$ знаем площадь поперечного сечения $S(x) \in C[a, b]$, то $V(\text{тела}) = \int_a^b S(x) dx$.

2)



Если $f \in C[a, b]$, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, то объём тела вращения соответствующий криволинейной трапеции вокруг оси Oy :

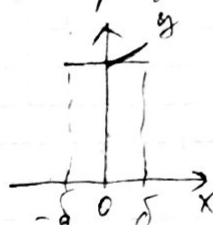
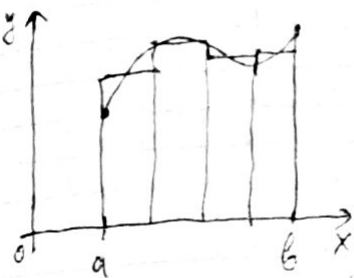
$$V_{\text{ог}} = 2\pi \int_a^b f(x) dx \quad f_c = \frac{\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = f(\xi) \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x) dx = f_c(b-a) + R \quad (2)$$

ошибка

Метод прямоугольников

Заменим площадь криволинейной трапеции на сумму разбиения площадей прямоугольников.



Пусть $f \in C[a, b]$. Возьмем шаг разбиения на одном отрезке разбиения. Положим в

формуле (2): $a = -\delta, b = \delta$; в ф-ле (1): $n = 1, \lambda_1 = 1, x_1 = 0$. Тогда получим $\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx = f(0) \cdot 2\delta + R_0$. Оценим R_0 . Обозначим

$F(x)$ - первообр. для f на $[-\delta; \delta]$; $\Psi(x) = F(x) - F(-x)$. Тогда, $\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx = F(\delta) - F(-\delta) = \Psi(\delta)$. $\Psi'(\xi) = F'(\xi) + F'(-\xi) = f(\xi) + f(-\xi) \Rightarrow \Psi'(0) = 2f(0)$. Разложим Ψ по ф-ле Маклорена ($\Psi \in C^3[-\delta; \delta]$): $\Psi(\delta) = \Psi(0) + \Psi'(0) \cdot \delta + \frac{\Psi''(\xi)}{2} \delta^2 + \frac{\Psi'''(\xi)}{3!} \delta^3$, $0 < \xi < \delta$.

Получаем, что $R_0 = \Psi(\delta) - 2f(0)\delta = \frac{\Psi'''(\xi)}{3!} \delta^3 = \frac{f''(\xi) + f''(-\xi)}{3!} \delta^3 = \frac{f''(\xi)}{3} \delta^3$.
 $f'(0) - f'(0) = 0$
 $f''(\xi)$ в силу ф-лы (1), $|\xi| \leq \delta$, где f'' непрерывна.

Вернемся к ф-ле на всем отрезке: пусть $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = b$,

$$x_k = a + \frac{b-a}{2n} k, \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

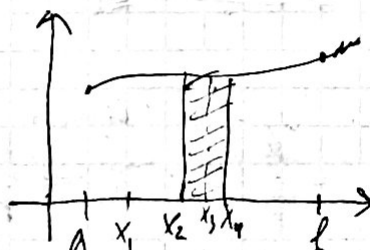
$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (f(x_{2k-1}) \cdot \frac{b-a}{n} + R_{2k-1}) =$$

$$\approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{2k-1}) + R, \text{ где } R = R_1 + R_3 + \dots + R_{2n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{f''(\xi_{2k-1})}{3} \cdot \frac{(b-a)^3}{8n^2} \Leftrightarrow (\xi_{2k-1} \in$$

$$[x_{2k-2}, x_{2k}]) \Leftrightarrow \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \frac{(f''(\xi_1) + f''(\xi_3) + \dots + f''(\xi_{2n-1}))}{n} = f''(\xi^*) \text{ по лемме (1), } \xi^* \in [a, b].$$

Окончательно: $R = \frac{f''(\xi^*) (b-a)^3}{24n^2} = O(\frac{1}{n^2})$, n -кон-во т. разбиения.



Лемма 2 (ф-на Тейлора с остатком в интегр. форме)

Пусть f -м f $(n+1)$ раз непрерывно диф-на в $B_f(a)$; тогда $\forall x \in B_f(a)$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \quad (3)$$

Доказ-во: $\frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n d f^{(n)}(t) = \frac{1}{n!} (x-t)^n \cdot f^{(n)}(t) \Big|_a^x - \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n)}(t) \cdot n(x-t)^{n-1} dt$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(x-a)^n - \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt = \dots = -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} - \dots - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a) \quad \text{т.е.}$$

Метод трапеций

Площадь крив-й трапеции на отрезке разбиваем приближаем площадью одной трапеции. Пусть $f \in C^2[a, b]$. Положим в (1), (2):

$$a = -\delta, b = \delta; n = 2; \lambda_1 = \lambda_2 = 1; x_1 = -\delta, x_2 = \delta:$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx = \frac{f(-\delta) + f(\delta)}{2} 2\delta + R_0$$

Затем разложим две ф-ии ψ и ψ' :

$$\psi(\delta) = \psi(-\delta) + \frac{\psi'(-\delta)}{1!} \delta + \frac{\psi''(-\delta)}{2!} \delta^2 + \frac{1}{2!} \int_{-\delta}^{\delta} \psi'''(t)(\delta-t)^2 dt$$

$$\frac{\psi'(\delta) + \psi'(-\delta)}{2} = \frac{\psi'(-\delta)}{2} + \frac{\psi''(-\delta)}{1!} \delta + \int_{-\delta}^{\delta} \psi'''(t)(\delta-t) dt \cdot \delta$$

Отсюда, $R_0 = \int_{-\delta}^{\delta} \psi'''(t) \frac{(t-\delta)^2}{2} dt$

$$= \psi'''(\xi) \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \frac{(t-\delta)^2}{2} dt = \psi'''(\xi) \cdot \left(\frac{\delta^3}{6} - \frac{\delta^3}{2} \right) = -\frac{\psi'''(\xi)}{3} \delta^3$$

$= -\frac{2f'''(\xi)}{3} \delta^3, \xi \in [-\delta; \delta]$. Пусть теперь $x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k, k = 0, \dots, n$.

Тогда $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \frac{b-a}{n} + R_k \right) = \frac{b-a}{2n} (f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)) + R$

$R = R_1 + \dots + R_n = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(b-a)^3}{8n^3} (f'''(\xi_1) + \dots + f'''(\xi_n)) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \frac{f'''(\xi_1) + \dots + f'''(\xi_n)}{n} =$

$= O\left(\frac{1}{n^2}\right).$

Метод параболы и метод Симпсона

Пусть $f \in C^4[a, b]$. Положим в (1), (2): $a = -\delta, b = \delta; n = 3; \lambda_1 = \lambda_3 = 1, \lambda_2 = 4; x_1 = -\delta, x_2 = 0, x_3 = \delta.$

$\in \sum |g(x_k) - g(x_{k-1})|$. Фун-я g наз-е фун-и ограниченной вариации (ф-та с ограниченным изменением), если $\exists C > 0$, т.е. $\forall T$ -разбиении $\epsilon a, b$: $V_g(T) \leq C$. Полная вариация $V_a^b g = V_a^b g := \sup_T V_g(T)$. Писать $g \in BV[a, b]$.

св-ва фун-ий с ограниченной вариацией:

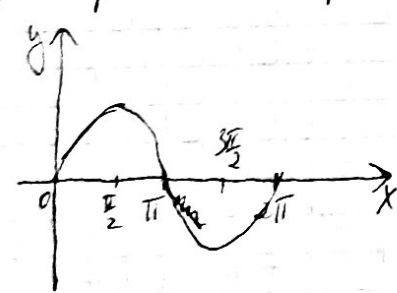
- 1) $f, g \in BV[a, b]$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha f + \beta g) \in BV[a, b]$.
- 2) $f \in BV[a, c]$ и $f \in BV[c, b]$, то $f \in BV[a, b]$ и $V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$.
- 3) Если f -монотонна на $[a, b]$, то $f \in BV[a, b]$ и $V_a^b f = |f(b) - f(a)|$.

4) Если $f \in BV[a, b]$, то $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, где φ, ψ - возр-е на $[a, b]$. Д-во (4): Обозначим $\tilde{f}(x) = V_a^x f$, $a \leq x \leq b$ в силу стр-е и св-ва 2) фун-я $\tilde{f}$ св-е неубывающей. Пусть $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{f}(x) - f(x)$, $a \leq x \leq b$. Покажем, что $\tilde{\varphi}$ также не убывает: пусть $x_1 < x_2$, тогда $\tilde{\varphi}(x_2) - \tilde{\varphi}(x_1) = \underbrace{\tilde{f}(x_2) - \tilde{f}(x_1)}_{V_{x_1}^{x_2} f} - \underbrace{(f(x_2) - f(x_1))}_{\text{д-во 2)}} \geq 0 \Rightarrow \tilde{\varphi}(x_2) \geq \tilde{\varphi}(x_1)$.



$\Rightarrow V_{x_1}^{x_2} f - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0 \Rightarrow \tilde{\varphi}(x_2) \geq \tilde{\varphi}(x_1)$. Положим теперь $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) + x$, $\psi(x) = \tilde{\varphi}(x) + x$, тогда φ, ψ возр-т и $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ т.е. д.

Пример Рассмотрим ф-цию $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$.



$$V_a^x f = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 1 + (1 - \sin x), & \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2 \\ 1 + 2 + (\sin x - (-1)), & 3\pi/2 \leq x \leq 2\pi \end{cases} \Rightarrow V_a^{2\pi} f = 4$$

Опред. Пусть ф-я f опред-на на $[a, b]$, $g \in BV[a, b]$. Пусть $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n; g_1, \dots, g_n\}$ - разбиение $[a, b]$. Выражение $\sigma_g(f, V) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))$ наз-е интегральной суммой Римана-Стилтьеса ф-ции f по ф-ии g .

Опр. 3 Число $\bar{I}_g(f)$ наз-о интегралом Римана-Стилтьеса от функции f по функции g на $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall V$ -размеченного разбиения ξ, η , $\Delta_k < \delta : |\sigma_g(f; V) - \bar{I}_g(f)| < \varepsilon$.
 пишут: $(RS) \int_a^b f(x) dg(x)$.

Т.1 Если $f \in C[a, b]$, $g \in BV[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dg(x)$ сущ-ет.

Опр. 4 Пусть f определена на $[a, b]$, f ограничена на $[a, b]$ и возрастает на $[a, b]$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ разбиение $[a, b]$. Обозначим $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, $m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$. Верхней (нижней) суммой Дарбу-Стилтьеса функции f по функции g наз-о

$$S_g^+(f, T) = \sum_{k=1}^n M_k (g(x_k) - g(x_{k-1})) \quad \left(S_g^-(f, T) = \sum_{k=1}^n m_k (g(x_k) - g(x_{k-1})) \right).$$

Т.2 Пусть f ограничена на $[a, b]$, g возр-т на $[a, b]$. $\int_a^b f(x) dg(x)$ сущ-ет $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists T$ -разбиение $[a, b]$, т.ч. $S_g^+(f, T) - S_g^-(f, T) < \varepsilon$.

Т.3 Если $f \in R[a, b]$, $g \in Lip[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dg(x)$ сущ-т:

$$\exists C > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |g(x_2) - g(x_1)| \leq C \cdot |x_2 - x_1|.$$

Свойства интеграла Римана-Стилтьеса

1) Пусть $f, g' \in R[a, b]$, тогда $(RS) \int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx$.

2) $\int_a^b (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) dg(x) = \alpha \int_a^b f_1(x) dg(x) + \beta \int_a^b f_2(x) dg(x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, если инт-л в правой части сущ-т.

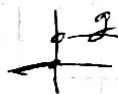
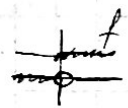
Аналогично, $\int_a^b f(x) (g_1(x) + \beta g_2(x)) = \int_a^b f(x) dg_1(x) + \beta \int_a^b f(x) dg_2(x)$.

3) $\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x)$, если инт-л в левой части $\exists$.

Пусть $a < c < b$; замечание из сущ-ие $\int_a^c f dg$ и $\int_c^b f dg$ не следует, вообще говоря, сущ-ие $\int_a^b f dg$.

Пример

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$$\int_{-1}^0 f(x) dg(x) = 0; \quad \int_0^1 f(x) dg(x) \stackrel{BV}{=} 0, \text{ при этом: } \int_{-1}^1 f(x) dg(x) \text{ не сущ-ет,}$$

т.к. $\forall V$ -разбиение $[-1, 1]$, т.ч. $\sigma \in (x_{k-1}, x_k)$:

$$\sigma_g(f, V) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (g(x_k) - g(x_{k-1})) = \begin{cases} 0, & \xi_k < 0 \\ 1, & \xi_k \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{интеграл сущ-т м.б. равен 0 или 1,}$$

выбавшимися от выбора ξ_k .

4) Если $\int_a^b f(x)dg(x)$ существует, $f, g \in R[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$.

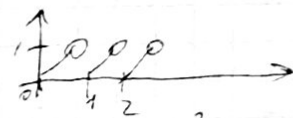
5) Если g возрастает на $[a, b]$; f, h — непрерывны по g на $[a, b]$ и $f(x) \leq h(x) \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)dg(x) \leq \int_a^b h(x)dg(x)$.

6) Пусть $f \in R[a, b]$, g возрастает на $[a, b]$. Обозначим, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$. Тогда $\exists \mu \in [m, M]$, т.е. $\int_a^b f(x)dg(x) = \mu(g(b) - g(a))$.

Если $f \in C[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b]$: $\int_a^b f(x)dg(x) = f(\xi)(g(b) - g(a))$.

Пример $I = \int_0^3 x d\{x\}$, где $\{x\} = x - [x]$.

$$I = \int_0^1 x d\{x\} + \int_1^2 x d\{x\} + \int_2^3 x d\{x\} \ominus$$



$$= \int_0^1 x dx + \underbrace{1 \cdot (-1)}_{\substack{\text{скачок } g(x) \\ \text{в } x=1}} + \int_1^2 x dx + \underbrace{2 \cdot (-1)}_{\substack{\text{скачок } g(x) \\ \text{в } x=2}} + \int_2^3 x dx + \underbrace{3 \cdot (-1)}_{\substack{\text{скачок } g(x) \\ \text{в } x=3}} = \int_0^3 x dx - 6 = \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 - 6 = -\frac{3}{2}.$$

§10. Пространство $\mathbb{R}^n$.

Основные понятия.

Опр.1 Линейное простран-во E (над полем $\mathbb{R}$) наз-е векторным, если на нём введено скалярное произ-ие:

функция $(\cdot, \cdot): E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ со св-ми:

- 1) $(x, x) \geq 0 \forall x \in E$, причём $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) $(x, y) = (y, x) \forall x, y \in E$;
- 3) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z) \forall x, y, z \in E$;
- 4) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Линейное пр-во E наз-е нормиров-м, если на нём введена ф-я $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ (норма или длина эл-та) со св-ми:

- 1) $\|x\| \geq 0 \forall x \in E$, причём $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- 3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in E$.

Легко проверить, что любое векторное пр-во E явл-е нормир-м относ-но норме $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Линейное пр-во E наз-е метрическим, если на нём введена ф-ция

$\rho(\cdot, \cdot): E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ (метрика или расстояние) со св-ми:

1) $\rho(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in U$, причём $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x \in U, y \in U$

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in U$

Легко проверить, что любая нормиров. пр-во аб-а метричес-
ким отно-но $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Опр. 2 Пространство $\mathbb{R}^n$ (n -мерное действ. пр-во) - это
мн-ое пр-во всех наборов вида $(x_1, \dots, x_n)$, где $x_k \in \mathbb{R}$,
 $k = 1, \dots, n$, с введенными на нём операциями сложения:

$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ и умно-е на скаляр

$\lambda \in \mathbb{R}: \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$. Такие наборы будем называть
элементами (точками) пр-ва $\mathbb{R}^n$ и обозн-ть $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Заметим, что пр-во $\mathbb{R}^n$ аб-а евклидовым относител-но
скалярного произ-е: $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Введём норму:

$\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ и метрику: $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots +$

$(x_n - y_n)^2}$. Опр. 3 Открытым n -мерным шаром ~~назовём~~ радиуса
 $r > 0$ ~~назовём~~ в т. $\bar{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ назовём мн-во $B_r(\bar{x}^0) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n |$
 $\rho(\bar{x}, \bar{x}^0) < r\}$. Закрытым шаром - мн-во $\bar{B}_r(\bar{x}^0) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \rho(\bar{x}, \bar{x}^0) \leq r\}$.
Сфера в $\mathbb{R}^n$ - мн-во $S_r(\bar{x}^0) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \rho(\bar{x}, \bar{x}^0) = r\}$.

Параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ - мн-во $\Pi(\bar{x}^0) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | |x_1 - x_1^0| < d_1, \dots, |x_n - x_n^0| < d_n,$
 $d_1, \dots, d_n > 0\}$.

Опр. 4 ε -окрестностью т. $\bar{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ будем наз-ть мн-во $B_\varepsilon(\bar{x}^0)$.

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Точка $\bar{x}^0$ наз-е внутренней точкой мн-ва A ,
если $\exists \varepsilon > 0$, т.е. $B_\varepsilon(\bar{x}^0) \subseteq A$. Точка $\bar{x}^0$ наз-е внешней точкой
мн-ва A , если $\exists \varepsilon > 0$, т.е. $B_\varepsilon(\bar{x}^0) \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Точка $\bar{x}^0$ наз-е
граничной т. мн-ва A , ^{дополнение} мн-ва A если она не явл-ся
ни внешней, ни внутренней, т.е. $\forall \varepsilon > 0: B_\varepsilon(\bar{x}^0) \cap A \neq \emptyset$ и
 $B_\varepsilon(\bar{x}^0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$. Совокупность всех граничных точек мн-ва
 A наз-е его границей и обозн-ся ∂A .

Т. $\bar{x}^0$ наз-е предельной т. мн-ва A , если в любой её
окрестности лежат бесконечно много эле-ов мн-ва A

или, эквив-но, в любой окрестности есть хотя бы одна т. мн-ва A , отличная от $\bar{x}^0$.

Опр. 5 Мн-во $A \subset \mathbb{R}^n$ наз-е открытым, если все его т. - внутр. точки. Мн-во A наз-е замкнутым, если мн-во $\mathbb{R}^n \setminus A$ открыто. Мн-во A наз-е ограниченным, если $\exists R > 0$, т.е. $A \subset B_R(0)$.

Утв. 1 Следующие утвержд-е эквив-нт:

- 1) мн-во A замкнуто;
- 2) мн-во A содержит все свои предельные точки;
- 3) мн-во A содержит все свои граничные точки.

Доказ-во: $1 \Rightarrow 2$ Пусть $\bar{x}^0$ - предельная т. A . Предположим, что $\bar{x}^0 \notin A$. Тогда $\bar{x}^0 \in (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Мн-во $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ открыто $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, т.е.

$B_\varepsilon(\bar{x}^0) \subset (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Значит, в $B_\varepsilon(\bar{x}^0)$ нет точек мн-ва $A \Rightarrow \bar{x}^0$ - не пред. точка (!!) $2 \Rightarrow 3$ Пусть $\bar{x}^0$ - гр. т. A . Предположим, что $\bar{x}^0 \notin A$. По опр-ю: $\forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(\bar{x}^0) \cap A \neq \emptyset$. Поскольку $\bar{x}^0 \notin A$, то $\forall \varepsilon > 0: B_\varepsilon(\bar{x}^0) \cap A \neq \emptyset$. Это означает, что $\bar{x}^0$ - пред. т. $\Rightarrow \bar{x}^0 \in A$ (!!).

$3 \Rightarrow 1$ Рассмотрим мн-во $(\mathbb{R}^n \setminus A)$. Пусть $\bar{x} \in (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Тогда она явл-е внешней т. мн-ва A (т.е. все внутр. и гранич. точки A принадл. этой мн-ву). Значит, $\exists \varepsilon > 0$, т.е. $B_\varepsilon(\bar{x}) \subset (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Значит любая т. мн-ва $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ явл-е не внутр. точкой $\Rightarrow$ оно открыто. т.е. A замкнуто.

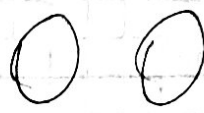
Опр. 6 Непрерывной кривой в $\mathbb{R}^n$ наз-е мн-во $L = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t), \alpha \leq t \leq \beta; \varphi_k \in C[\alpha, \beta], k=1, \dots, n\}$.

Говорят, что т. $\bar{x}^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$ и $\bar{x}^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)$ можно соединить непр-й кривой, если $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in C[\alpha, \beta]$, т.е. $\varphi_1(\alpha) = x_1^1, \dots, \varphi_n(\alpha) = x_n^1$, $\varphi_1(\beta) = x_1^2, \dots, \varphi_n(\beta) = x_n^2$.

Мн-во $A \subset \mathbb{R}^n$ наз-е связным, если любые его две точки можно соединить непрер. кривой L , $L \subset A$.



св-а.



не св-а

Опр. 7 Областью в $\mathbb{R}^n$ наз-ся любое открытое линейно связное мн-во $D \subset \mathbb{R}^n$.

Опр. 8 Последовательностью в $\mathbb{R}^n$ наз-ся отображение: $N \rightarrow \mathbb{R}^n$. Будем писать: $\{\bar{x}^m\}_{m=1}^{+\infty}$ или $\{\bar{x}^m\}$, $\bar{x}^m \in \mathbb{R}^n$.

Т. $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ наз-ся пределом посл-ти $\{\bar{x}^m\}$ при $m \rightarrow +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.е. $\forall m \geq N: \rho(\bar{x}^m, \bar{a}) < \varepsilon$. Говорят, что после-ть $\{\bar{x}^m\}$ сход-ся к $\bar{a}$ и пишут: $\lim_{m \rightarrow +\infty} \bar{x}^m = \bar{a}$ или $\bar{x}^m \rightarrow \bar{a}$.

Лемма 1 $\bar{x}^m \rightarrow \bar{a} \Leftrightarrow x_1^m \rightarrow a_1, \dots, x_n^m \rightarrow a_n$.

Док-во: $\Rightarrow$ Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$, т.е. $\forall m \geq N: \sqrt{(x_1^m - a_1)^2 + \dots + (x_n^m - a_n)^2} < \varepsilon$.

Поскольку $|x_k^m - a_k| \leq \sqrt{(x_1^m - a_1)^2 + \dots + (x_n^m - a_n)^2} \quad \forall k = 1, \dots, n$, то $\forall m \geq N: |x_k^m - a_k| < \varepsilon \Rightarrow x_k^m \rightarrow a_k, \quad \forall k = 1, \dots, n$.

$\Leftarrow$ Возьмем $\varepsilon > 0, \quad \forall k = 1, \dots, n$. $\exists N_k \in \mathbb{N}$, т.е. $\forall m \geq N_k: |x_k^m - a_k| < \varepsilon/\sqrt{n}$. Обозначим $N = \max_{1 \leq k \leq n} N_k$, тогда $\forall m \geq N: \rho(\bar{x}^m, \bar{a}) = \sqrt{\underbrace{(x_1^m - a_1)^2}_{< \frac{\varepsilon^2}{n}} + \dots + \underbrace{(x_n^m - a_n)^2}_{< \frac{\varepsilon^2}{n}}} < \varepsilon \Rightarrow \bar{x}^m \rightarrow \bar{a}$. з.г.

Опр. 9 Послед-ть $\{\bar{x}^m\}, \bar{x}^m \in \mathbb{R}^n$, наз-ся фундам-й, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.е. $\forall m \geq N, \forall r \in \mathbb{N}: \rho(\bar{x}^{m+r}, \bar{x}^m) < \varepsilon$.

Лемма 2 Послед-ть $\{\bar{x}^m\}$ фун-на $\Leftrightarrow$ все послед-ти $\{x_k^m\}, k = 1, \dots, n$, сб-се фундам-ми.

Док-во: $\Rightarrow$ Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$, т.е. $\forall m \geq N, \forall r \in \mathbb{N}: \sqrt{(x_1^{m+r} - x_1^m)^2 + \dots + (x_n^{m+r} - x_n^m)^2} < \varepsilon$. Тогда $\forall k = 1, \dots, n: |x_k^{m+r} - x_k^m| < \varepsilon \Rightarrow$

послед-ть $\{x_k^m\}$ фун-на. $\Leftarrow$ Возьмем $\varepsilon > 0, \quad \forall k = 1, \dots, n \exists N_k \in \mathbb{N}$, т.е. $\forall m \geq N_k, \forall r \in \mathbb{N}: |x_k^{m+r} - x_k^m| < \varepsilon/\sqrt{n}$. Обозначим $N = \max_{1 \leq k \leq n} N_k$.

Тогда $\forall m \geq N: \rho(\bar{x}^{m+r}, \bar{x}^m) < \varepsilon$. Значит, $\{\bar{x}^m\}$ фун-на. з.г.

Т.1 (кр. Коши) Послед-ть $\{\bar{x}^m\}$ сход-ся $\Leftrightarrow$ она фун-на.

Д-во: $\{\bar{x}^m\}$ сход-ся $\Leftrightarrow$ сход-ся все послед-ти $\{x_k^m\}, k = 1, \dots, n$

Лемма 1 $\Leftrightarrow$ каждая из послед-й $\{x_k^m\}$ фун-на. (кр. Коши для числовн. послед-ей) $\Leftrightarrow$ послед-ть $\{\bar{x}^m\}$ фун-на (1.2) з.г.

Опр. 10 Пусть $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots \in \mathbb{N}$, $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$. Послед-тв $\{\bar{x}^{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ наз-е подпоследоват. послед. $\{\bar{x}^m\}$.

Т.2 (Болляна - Вейерштрасса) Из любой ограниченной последователности $\{\bar{x}^m\}$, $\bar{x}^m \in \mathbb{R}^n$, можно выделить сходящуюся подпослед-тв.

Док-во: Послед-тв ограничена $\Rightarrow \exists R > 0$, т.е. $\bar{x}^m \in B_R(0) \Rightarrow |\bar{x}_k^m| < R$

$\forall k=1, \dots, n$ т.е. все координ. послед-ти $\{\bar{x}_k^m\}$ ограничены. Возьмём послед-тв $\{\bar{x}_1^m\}$ и выберем из неё сходящуюся подпослед-тв $\{\bar{x}_1^{m_{k_1}}\}_{k_1=1}^{+\infty}$; $\bar{x}_1^{m_{k_1}} \rightarrow a_1$. Рассмотрим теперь послед-тв $\{\bar{x}_2^{m_{k_1}}\}$. Она ограничена $\Rightarrow$ из неё можно выделить с-е подпослед-тв $\{\bar{x}_2^{m_{k_1 k_2}}\}_{k_2=1}^{+\infty}$; $\bar{x}_2^{m_{k_1 k_2}} \rightarrow a_2$. И так далее, на последнем шаге рассмотрим послед-тв $\{\bar{x}_n^{m_{k_1 \dots k_n}}\}_{k_n=1}^{+\infty}$ и возм. из неё с-е подпослед-тв $\{\bar{x}_n^{m_{k_1 \dots k_n}}\}_{k_n=1}^{+\infty}$; $\bar{x}_n^{m_{k_1 \dots k_n}} \rightarrow a_n$.

Возьмём послед-тв $\{\bar{x}^{m_{k_1 \dots k_n}}\}_{k_n=1}^{+\infty}$. Для неё:

$\bar{x}_1^{m_{k_1 \dots k_n}} \rightarrow a_1$ (как подпослед-тв, сходящаяся послед-ти $\{\bar{x}_1^{m_{k_1}}\}$); и т.д. т.е. (по Л.1 $\bar{x}^{m_{k_1 \dots k_n}} \rightarrow \bar{a}$ т.е.)

§11. Понятие функции и переменных.

Предель функ-ии.

Опр. 1 Функцией и переменных будем называть отображение $f: X \rightarrow Y$, где $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}$. (То есть функ-ия это правило в соответствии с которым $\forall x \in X$ ставится в соответ-е число $y \in Y \subset \mathbb{R}$).

Опр. 2 (предель функ-ии по Гейне) Число $b \in \mathbb{R}$ наз-е предельн функ-ии f в т. $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, если $\forall$ послед-ти $\{\bar{x}^m\}$ аргументов функ-ии, т.е. $\bar{x}^m \rightarrow \bar{a}$, $\bar{x}^m \neq \bar{a}$: $f(\bar{x}^m) \rightarrow b$.

Опр. 3 Число $b \in \mathbb{R}$ наз-е предельн функ-ии f в точке $\bar{a}$, (по Коши) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.е. $\forall \bar{x} \in X \cap B_\delta(\bar{a})$: $|f(\bar{x}) - b| < \varepsilon$.

Опр. 4 экв-нт, док-во полностью аналогично $n=1$.

Для случая $b = \infty, +\infty, -\infty$ опр-е 2 сокр-се. В опр-е 3 нужно вместо нер-ва заменить на $|f(\bar{x})| > \varepsilon$; $f(\bar{x}) > \varepsilon$; $f(\bar{x}) < -\varepsilon$.

Опр. 4 Число $b \in \mathbb{R}$ наз-ся пределом ф-ии f при $\bar{x} \rightarrow \infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.е. $\forall \bar{x} \in X, \|\bar{x}\| > \delta: |f(\bar{x}) - b| < \varepsilon$. Если b - предел f в точке $\bar{a}$, то пишут: $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = b$ или $\lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow \bar{a} \\ \bar{x} \neq \bar{a}}} f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = b$.

Опр. 5 Фун-я f удовл-ет уловию Коши $\lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow \bar{a} \\ \bar{x} \neq \bar{a}}} f(\bar{x}) = b$ в т. $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ (при $\bar{x} \rightarrow \infty$), если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.е. $\forall \bar{x}', \bar{x}'' \in B_\delta(\bar{a}) \cap X (\forall \bar{x}', \bar{x}'' \in X; \|\bar{x}'\| > \delta, \|\bar{x}''\| > \delta): |f(\bar{x}') - f(\bar{x}'')| < \varepsilon$.

Т.1 (кр. Коши сущ-я) Фун-я f имеет конечный предел в т. $\bar{a}$ (при $\bar{x} \rightarrow \infty$) $\Leftrightarrow$ она удовл-ет уловию Коши в т. $\bar{a}$ (при $\bar{x} \rightarrow \infty$).

Док-во полностью анало-но случаю $n=1$.

Т.2 (об арифм. опер.) Пусть f, g опред-ны на мн-ве X , $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = b$, $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} g(\bar{x}) = c$. Тогда $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} (f(\bar{x}) \pm g(\bar{x})) = b \pm c$; $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} (f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})) = b \cdot c$; если $c \neq 0$, то $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = \frac{b}{c}$. Д-во: следует из опр. 2 и с-в мн-ва. Помен-ей.

Замечание: Вспомог-е опред-я и теоремах параграфа по-сле $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$ -прег. т. мн-ва X .

Опр. 6 Фун-я f наз-ся бесконечно малой в т. $\bar{a}$, если $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = 0$.

Повторные и двойные пределы

Опр. 7 Пусть ф-ия $f(x, y)$ опред-на в проколотой окрестности т. (x_0, y_0) . Если $\exists \varepsilon > 0$, т.е. $\forall y \in B_\varepsilon(y_0) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y)$ и $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = b$, то говорят, что в т. (x_0, y_0) существует повторный предел $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = b$. Аналогично можно определить:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$. Предел $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ (в смысле опр. 2 и 3) будем называть

двойным

Пример 1) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$. $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y}{0+y^2} = 0$.

Аналогично $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$. При этом $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ не сущ-т:

рассм. две-т-е: $x'_n = \frac{1}{n}, y'_n = \frac{1}{n}$, тогда $(x'_n, y'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0); f(x'_n, y'_n) = \frac{1}{2}$
 $x''_n = \frac{1}{n}, y''_n = -\frac{1}{n}$, тогда $(x''_n, y''_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0); f(x''_n, y''_n) = -\frac{1}{2}$

1. 2) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = 0$, поскольку $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ т.е. $\forall (x,y) \sqrt{x^2+y^2} < \delta: |f(x,y) - 0| \leq |(x^2+y^2) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}| \leq$
 $\leq x^2+y^2 < \delta^2 = \varepsilon. \rightarrow \delta = \sqrt{\varepsilon}$. При этом повторные пределы не существуют:
 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} + y^2 \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}))$ - не существуют.

(не существует внутренний предел). Аналогично не существуют $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$
 3) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = 0$ (аналогично примеру 2);

$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \sin \frac{1}{x} + y^2 \sin \frac{1}{x})$ - не существует.

4) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$.
 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -1$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$ не существует: рассмотрим последовательности $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n}$, тогда
 $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0,0)$; $f(x_n, y_n) = 0$; $x'_n = \frac{2}{n}, y'_n = \frac{1}{n}$, тогда $(x'_n, y'_n) \rightarrow (0,0)$,
 $f(x'_n, y'_n) = \frac{3}{5}$.

Утв. Если существует двойной предел ($\exists \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x,y) = b$) и $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = c$,
 то $b = c$.

§12. Непрерывность функций многих переменных.

Опр.1 Пусть функция f определена на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{a}$ - предельная точка X . Функция f непрерывна в т. $\bar{a}$, если $\lim_{x \rightarrow \bar{a}} f(x) = f(\bar{a})$.

Опр.2 (определение непрерывности по Гейне). Функция f непрерывна в т. $\bar{a}$, если $\forall$ последовательности $\{x^m\}$ аргументов, т.е. $x^m \rightarrow \bar{a}$ $f(x^m) \rightarrow f(\bar{a})$.

Опр.3 (Коши) Функция f непрерывна в т. $\bar{a}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ т.е. $\forall x \in B_\delta(\bar{a}) \cap X: |f(x) - f(\bar{a})| < \varepsilon$.

Определения эквивалентны.

Опр.4 Пусть f определена на множестве X , $\bar{a}$ - предельная точка X . Тогда $\bar{a}$ называется точкой разрыва функции, если f не является непрерывной в т. $\bar{a}$.

Опр. 5 Ф-ция f непрер-на на мн-ве A , если она непрерывна в каждой т. $\bar{a} \in A$. Пусть $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n \in \mathbb{R}$, $\bar{\Delta x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$. Пусть f определена в окрест-ти т. $\bar{a}$, тогда $\bar{a} + \bar{\Delta x}$ принадлежит этой окрест-ти.

Опр. 6 Выражение $\Delta f = f(\bar{a} + \bar{\Delta x}) - f(\bar{a})$ будем называть полным приращением ф-ции f в т. $\bar{a}$, соот-м приращением аргумента $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$. Выражение $\Delta_k f = f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \Delta x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)$ - частичное приращение, соот-м прир-ю Δx_k переменной x_k . Из опр. 1 следует, что ф-ция f непрерывна в т. $\bar{a} \Leftrightarrow \Delta f \xrightarrow[\Delta x_k \rightarrow 0]{\Delta x \rightarrow 0} 0$ ($\Delta f = f(\bar{a} + \bar{\Delta x}) - f(\bar{a})$). Если $\Delta_k f \xrightarrow[\Delta x_k \rightarrow 0]{\Delta x \rightarrow 0} 0$, то говорят, что ф-ция f непр-на в т. $\bar{a}$ по переменной x_k .

Очевидно, что из непр-ти ф-ции в т. следует её непр-ть по каждой из переменных. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 1 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ $f(x, 0) = f(0, y) = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x, 0) = 0$, т.е. f непр. по x в т. $(0, 0)$.

$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} f(0, \Delta y) = 0 \Rightarrow f$ непр. по y в т. $(0, 0)$. f явно разрывной в т. $(0, 0)$ по совокупности переменных: (т.е. в смысле опр-ий 1-3). Рассмотрим посл-ть $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n}; (x_n, y_n) \rightarrow (0, 0); f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$.

2) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ Эта ф-ция непр-на по x и по y в т. $(0, 0)$ (как и в примере 1). Более того,

f непр-на в т. $(0, 0)$ вдоль каждой прямой, проходящей через эту точку: положим $y = kx$, получим $f(x, kx) = \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = \frac{kx}{x^2 + k^2} \xrightarrow[k \neq 0]{x \rightarrow 0} 0 = f(0, 0)$. При этом f не явно непр-й,

рассм. посл-ть $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n^2}; (x_n, y_n) \rightarrow 0; f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq 0$.

Т. 1 Пусть ф-ции f и g опред-ны на мн-ве X и непр-ны в т. $\bar{a} \in X$. Тогда ф-ции $f \pm g, f \cdot g$ и (если $g(\bar{a}) \neq 0$) $\frac{f}{g}$ непр-ны в т. $\bar{a}$. Д-во: сразу следует из теор. об арифм. операциях над ф-циями, имеющими предел.

Т.2 (сохр-е знака). Пусть f определена в окрестности $t_0 \in \mathbb{R}^n$ и непрерывна в т. t_0 . Если $f(t_0) > 0 (< 0)$, то $\exists \delta > 0$, т.е. $f(t) > 0 (< 0)$ $\forall t \in B_\delta(t_0)$. Д-во: по лемме о промежуточных значениях $n=1$.

Опр.7 Пусть функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ определены на множестве $T \in \mathbb{R}^k$, пусть $\varphi_j: T \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим $X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t); t \in T\}$. Если на множестве X определена функция $f: X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$, то говорят, что на множестве T задана сложная функция $f(\varphi): T \rightarrow Y$.

Т.3 (непрер-ть сложной функ-ии). Если все функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ непрерывны в т. $\bar{t} \in T$, а функция f непрерывна в т. $\bar{x} = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, где $x_j^0 = \varphi_j(\bar{t})$, $j=1, \dots, n$, то сложная функция $f(\varphi)$ непрерывна в т. $\bar{t}$.

Д-во: Возьмём произвольную послед-ть $t^m, t^m \in T, t^m \rightarrow \bar{t}$. В силу непрерывности функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ в т. $\bar{t}$: $\varphi_j(t^m) \rightarrow \varphi_j(\bar{t})$, $j=1, \dots, n$. Обозначим $x_j^m = \varphi_j(t^m)$, тогда $\bar{x}^m = (x_1^m, \dots, x_n^m) \in X$, $\bar{x}^m \rightarrow \bar{x}^0$. Функция f непрерывна в т. $\bar{x}^0 \Rightarrow f(\bar{x}^m) \rightarrow f(\bar{x}^0)$. Значит, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t^m \in T, t^m \rightarrow \bar{t}$: $f(\varphi_1(t^m), \dots, \varphi_n(t^m)) \rightarrow f(\varphi_1(\bar{t}), \dots, \varphi_n(\bar{t}))$. Это и означает непрерывность сложной функции в т. $\bar{t}$ з.д.

Т.4 (о прохождении через промежуточ. значения)

Пусть функция f определена и непрерывна на линейно связном множестве X . Пусть $a, b \in X$; обозначим A -мн $\{f(a), f(b)\}$, $B = \max\{f(a), f(b)\}$. Тогда $\forall y \in [A, B]$ на любой непрерывной кривой $L \subset X$, соединяющей т. a и b , найдётся т. c такая, что $f(c) = y$.

Док-во: Пусть $L \subset X$ соединяет т. a и b . Тогда $L = \{(x_1, \dots, x_n) \in X \mid x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t); \alpha \leq t \leq \beta\}$, причём $\varphi_j \in C[\alpha, \beta]$, $\varphi_1(\alpha) = a_1, \dots, \varphi_n(\alpha) = a_n$, $\varphi_1(\beta) = b_1, \dots, \varphi_n(\beta) = b_n$.

Рассмотрим функцию f на кривой L : получим сложную функцию $f(\varphi(t), \dots, \varphi_n(t)) : [\alpha, \beta] \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ (это функция одной переменной). Она непрерывна на $[\alpha, \beta]$ как сложная функция. $A = \min\{f(\alpha), f(\beta)\}$, $B = \max\{f(\alpha), f(\beta)\} \Rightarrow \forall y \in [A, B] \exists \xi \in [\alpha, \beta]: f(\xi) = y$ (теор. о прохожд. непрерывной функции одной переменной через промежуточ. зн.). Обозначим $\bar{c} = (\varphi_1(\xi), \dots, \varphi_n(\xi))$, тогда $\bar{c} \in L$, $f(\bar{c}) = y$. з.д.

Т.5 (1-я теорема Вейерштрасса) Пусть функ-я f опред-на и непр-на на оград., замкн. мн-ве X . Тогда она оград-на на X .

До-во: Предположим противное: f не оград-на на X . Тогда $\forall m \in \mathbb{N} \exists \bar{x}^m \in X$, т.е. $|f(\bar{x}^m)| > m$. Рассмотрим посл-ть $\{\bar{x}^m\}$. Она ограничена (мн-во X оград.) $\Rightarrow$ из нее можно выделить с-с последовательность $\{\bar{x}^{m_k}\}$ (теор. Б.-В.) Пусть $\bar{x}^{m_k} \rightarrow \bar{x}^0$. Тогда $\bar{x}^0$ - предел. т. мн-ва $X \Rightarrow \bar{x}^0 \in X$ (т.к. мн-во X замкнуто). Значит, f непр-на в т. $\bar{x}^0$. Из непр-я непр-ти по Гейне $\Rightarrow f(\bar{x}^{m_k}) \rightarrow f(\bar{x}^0)$. Но по построению: $|f(\bar{x}^{m_k})| > m_k \geq k$. (!). След-но f оград-на. з-з.

Опр.8 Число $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$) наз-ся точной верхней (нижней) гранью функ-и f на мн-ве $X \in \mathbb{R}^n$, если:

- 1) $f(x) \leq M$ ($\geq m$) $\forall x \in X$;
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{x}' \in X: f(\bar{x}') > M - \varepsilon$ ($< m + \varepsilon$)

Обоз-я: $M = \sup_X f(x)$; $m = \inf_X f(x)$.

Т.6 (2-я теорема Вейерштрасса). Пусть f оград-на и непр-на на замкнутом огранич-м мн-ве X . Тогда $\exists \bar{x}', \bar{x}'' \in X: f(\bar{x}') = \sup_X f(x)$; $f(\bar{x}'') = \inf_X f(x)$. До-во: полностью аналогично случаю $n=1$.

Опр.9 Функ-я f равномерно непрерывна на мн-ве X , если (т. мн-ва X - предельная),

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.е. $\forall \bar{x}', \bar{x}'' \in X, \rho(\bar{x}', \bar{x}'') < \delta: |f(\bar{x}') - f(\bar{x}'')| < \varepsilon$.

Т.7 (Кантор) Пусть f непр-на на замкн. оград. мн-ве X . Тогда f равномерно непр-на на X .

До-во: Предположим противное: $\exists \varepsilon > 0$, т.е. $\forall m \in \mathbb{N} \exists \bar{x}^{m'}, \bar{x}^{m''} \in X$ $\rho(\bar{x}^{m'}, \bar{x}^{m''}) < \frac{1}{m}$, но $|f(\bar{x}^{m'}) - f(\bar{x}^{m''})| \geq \varepsilon$ (*). Выделим из посл-ти $\{\bar{x}^{m_k}\}$ с-с послед-ть $\bar{x}^{m_k'} \rightarrow \bar{x}^0 \in X$. f непр-на в т. $\bar{x}^0 \Rightarrow f(\bar{x}^{m_k'}) \rightarrow f(\bar{x}^0)$. Рассмотрим посл-ть $\{\bar{x}^{m_k''}\}$. Поскольку $\rho(\bar{x}^{m_k'}, \bar{x}^{m_k''}) < \frac{1}{m_k} \rightarrow 0$, то $\bar{x}^{m_k''} \rightarrow \bar{x}^0$. Значит, $f(\bar{x}^{m_k''}) \rightarrow f(\bar{x}^0)$. Тогда $|f(\bar{x}^{m_k'}) - f(\bar{x}^{m_k''})| \rightarrow 0$, з-з противор. пер-ву (*) $\Rightarrow$ + з-з.

§ 13. Дифференцируемость

функ-и многих переменных

4 Пусть функ-я f определена в области $D \subset \mathbb{R}^n$.

Опр. 1 Частное крауд-е (ЧК) функ-и f по пере-й x_k ($k=1, \dots, n$) наз-е выра-е $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)}{\Delta x_k} =$

$= \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_k}$ - ЧК в т. $\bar{x} \in D$. Обозначение: $f'_{x_k}(\bar{x})$ или $\frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{\bar{x}}$

Опр. 2 Функ-я f диф-ма в т. $\bar{x} \in D$, если её полное при-ращение $\Delta f = f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)$ представимо в виде: $\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n$, (1), где константы $A_1, \dots, A_n$ не зависят от Δx_k ; $\alpha_k \xrightarrow{\Delta x_k \rightarrow 0} 0$, $k=1, \dots, n$.

Теорема 1 (необходимые условия дифр.) $\Delta x_k \rightarrow 0$

Если функ-я f диф-ма в т. $\bar{x}$, то у неё в этой точке есть ЧК по всем переменным, причём $A_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{\bar{x}}$, где A_k - почтен-ные в правой части (1), $k=1, \dots, n$.

До-во: Положим в (1): $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_{k-1} = \Delta x_{k+1} = \dots = \Delta x_n = 0$, получим

$\Delta_k f = A_k \cdot \Delta x_k + \tilde{\alpha}_k \cdot \Delta x_k$, $\tilde{\alpha}_k = \alpha_k(0, 0, \dots, 0, \Delta x_k, 0, \dots, 0) \rightarrow 0$ при $\Delta x_k \rightarrow 0$.

Значит, $\exists \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = A_k + \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \tilde{\alpha}_k = A_k$ т.е.г.

Обозначим, $\rho = \rho(\bar{x}^0, \bar{x}^0 + \Delta x) = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$. Тогда запишем (1)

эквив-на следующим: $\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + \theta(\rho)$, $\rho \rightarrow 0$ (2)

Докажем это (1) $\Rightarrow$ (2): $|A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n| = (\rho \neq 0) = \rho \cdot |\alpha_1 \cdot \frac{\Delta x_1}{\rho} + \dots + \alpha_n \cdot \frac{\Delta x_n}{\rho}| \leq$
 $\leq \rho (|\alpha_1| \cdot \left| \frac{\Delta x_1}{\rho} \right| + \dots + |\alpha_n| \cdot \left| \frac{\Delta x_n}{\rho} \right|) \leq \rho (|\alpha_1| \cdot \underbrace{\left| \frac{\Delta x_1}{\rho} \right|}_{\leq 1} + \dots + |\alpha_n| \cdot \underbrace{\left| \frac{\Delta x_n}{\rho} \right|}_{\leq 1}) \leq$
 $\leq \rho (|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|) = \rho \cdot h$, где

$\alpha \xrightarrow{\Delta x_k \rightarrow 0} 0$, где $\left\{ \frac{\Delta x_k \rightarrow 0}{\Delta x_k \rightarrow 0} \right\} \Leftrightarrow \rho \rightarrow 0$, значит $\alpha \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \rho \cdot \alpha = \bar{O}(\rho)$, $\rho \rightarrow 0$.

2) $\Rightarrow$ 1) $\bar{O}(\rho) = \rho \cdot \alpha$, где $\alpha \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$ или, эквив-но $\alpha \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$. Откуда, $\bar{O}(\rho) = \frac{\rho^2}{\rho} \cdot \alpha =$
 $= \frac{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}{\rho} \cdot \alpha = \frac{\Delta x_1}{\rho} \cdot \underbrace{\alpha \cdot \Delta x_1}_{\xrightarrow{\Delta x_1 \rightarrow 0} 0} + \dots + \frac{\Delta x_n}{\rho} \cdot \underbrace{\alpha \cdot \Delta x_n}_{\xrightarrow{\Delta x_n \rightarrow 0} 0} = \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \cdot \Delta x_n$, где
 $\alpha_k = \frac{\Delta x_k}{\rho} \cdot \alpha \xrightarrow{\Delta x_k \rightarrow 0} 0$ т.е.г.

Таким образом, стр-е диф-ти ф-ции в т. $\bar{x}$ можно записать в виде $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}} \Delta x_n + o(\rho)$, $\rho \rightarrow 0$.

Ув. 1 Если f диф-на в т. $\bar{x}^0$, то она непрер-на в т. $\bar{x}^0$.

До-во: $\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n \xrightarrow[\Delta x_i \rightarrow 0]{\Delta x \rightarrow 0} 0 \Rightarrow f$ непрер. в т. $\bar{x}^0$. з.г.

Замечание Из наших рассуждений следу-ет по всем перемен-ым ф-ии в т. не имеет, вообще говоря, ед- диф-ты (и да-же непрер-ности) в этой т.:

Примеры 1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ $f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} =$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$; $f'_y(0,0) = 0$. Но f даже не аб-се непрер. в т. $(0,0)$ (например $f(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0$ при $x \rightarrow 0$)

2) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$. $f(x,0) = 0$, $f(0,y) = 0 \Rightarrow f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$.

Проверим на диф-ть: $\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = \sqrt[3]{x^2 y} \stackrel{?}{=} \underbrace{f'_x(0,0)}_{=0} \cdot (x-0) + \underbrace{f'_y(0,0)}_{=0} \cdot (y-0) + o(\sqrt{x^2 + y^2})$, $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \stackrel{?}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{2} x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \Rightarrow f$ не диф-на в т. $(0,0)$, хотя непрер-на).

12. Достаточные условия диф-ти ф-ии в т.)

Пусть f определена в нек-ой окрестности т. $\bar{x}^0$. Если в этой окр. сущ-ет ЧП f по всем перемен-ым и все ЧП непрер-ны в т. $\bar{x}^0$, то f диф-на в т. $\bar{x}^0$.

До-во: Пусть $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ достаточно малы, тогда $\Delta f = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) + f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0 + \Delta x_3, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) + \dots + f(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) = \sum_{k=1}^n (f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0, \dots, x_n^0 + \Delta x_n)) \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^n f'_k(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \theta_k \Delta x_k, x_{k+1}^0 + \Delta x_{k+1}, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) \cdot \Delta x_k$
 Примем т. Лагранжа к ф-ии $f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \theta_k \Delta x_k, \dots, x_n^0 + \Delta x_n)$ по прм-ой x_k на отрезке $[x_k^0, x_k^0 + \Delta x_k]$.
 $\Rightarrow f$ диф-на в т. $\bar{x}^0$ з.г.

Замечание Непрер-ность ЧП не аб-се необход. условиями диф-ти: рассмотрим ф-ию:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + y, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f(0,y) = y \Rightarrow f'_y(0,0) = 1$$

$$f(x,0) = x^2 \sin \frac{1}{x} \Rightarrow f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0. \Delta f = x^2 \sin \frac{1}{x} + y = 0 \stackrel{?}{=} 0 \cdot (x-0) + 1 \cdot (y-0) + o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

$$x^2 \sin \frac{1}{x} = o(\sqrt{x^2+y^2}) \text{ (если } x \neq 0, \text{ при } x=0: 0 = o(\sqrt{x^2+y^2}) \text{ верно).}$$

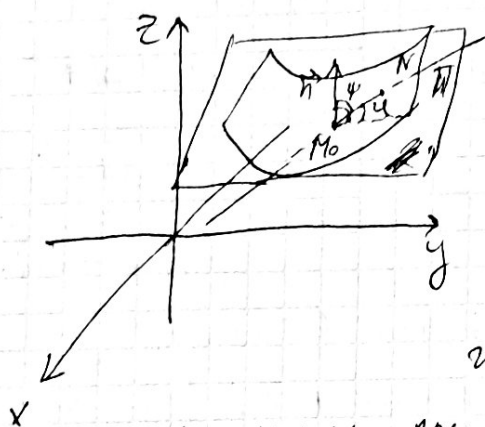
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left| \frac{x-2\cos y}{y-2\sin y} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2\cos y \sin \frac{1}{2\cos y}}{2\cos y} = \lim_{y \rightarrow 0} \cos y \sin \left(\frac{1}{2\cos y} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ диф-ма в т. } (0,0). \text{ При этом } f'_x(x,y) \Big|_{(0,0)} = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= \underbrace{2x \sin \frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\text{не имеет предел при } x \rightarrow 0} \Rightarrow f'_x(x,y) \text{ разрывна в т. } (0,0).$$

Геометрический смысл диф-та.

Рассмотрим ф-цию $z = f(x,y)$. Пусть она диф-ма в т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
Тогда $f(x,y) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f'_x(M_0)}_A (x-x_0) + \underbrace{f'_y(M_0)}_B (y-y_0) + o(\delta), \delta = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.



$M_0(x_0, y_0, z_0), N(x, y, f(x, y))$

Опр. 3 Касательная плоскость к поверхности $z = f(x,y)$ в т. M_0 наз-т плоскость Π такая, что угол между Π и секущей M_0N стремится

к нулю при $N \rightarrow M_0$. Обозначим $\varphi = \angle(M_0N, \Pi)$;

$\psi = \angle(M_0N, \vec{n})$, где $\vec{n} \perp \Pi$. Тогда $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим плоск-ть

$\Pi: A(x-x_0) + B(y-y_0) - (z-z_0) = 0, \vec{MN} = \{x-x_0, y-y_0, f(x,y)-z_0\}; \vec{n} = \{A, B, -1\}$.

$$\text{Тогда } \left| \cos \psi \right| = \frac{|\langle \vec{MN}, \vec{n} \rangle|}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|A(x-x_0) + B(y-y_0) - (f(x,y)-z_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (f(x,y)-z_0)^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \leq \frac{o(\delta)}{\delta} = o(1) \rightarrow 0$$

$\xrightarrow{N \rightarrow M_0}$

$\Rightarrow \psi \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi \rightarrow 0$. Если f диф-ма в т. (x_0, y_0) , то в т. $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ суще-т касат. плоск-сть к поверх-ти $z = f(x,y)$. Её ур-е:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y-y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

II (дифер-е сложной ф-ции)

Пусть все ф-ции $u_1(E), \dots, u_n(E)$ диф-мы в т. $E \in T \subset \mathbb{R}^k$, а

Ф-ция $f(\bar{x})$ гур-ма в T . $\bar{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, где $x_j^0 = \varphi_j(\bar{t}^0)$, $j=1, \dots, n$.
 Тогда линейная Ф-ция $f(\bar{t})$ гур-ма в T . $\bar{t}^0$, причем $\frac{\partial f(\bar{t})}{\partial t_i} \Big|_{\bar{t}^0} =$
 $\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^0} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} \Big|_{\bar{t}^0} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^0} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i} \Big|_{\bar{t}^0}$, $i=1, \dots, k$.

До-во: Функции φ_j , $j=1, \dots, n$ гур-мы в T . $\bar{t}^0 \Rightarrow \Delta \varphi_j = \varphi_j(t_1^0 + \Delta t_1, \dots, t_k^0 + \Delta t_k) - \varphi_j(t_1^0, \dots, t_k^0) =$
 $\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^0} \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^0} \Delta t_k + o(\rho)$, $\rho \rightarrow 0$, где $\rho = \sqrt{(\Delta t_1)^2 + \dots + (\Delta t_k)^2}$.

Ф-ция f гур-ма в T . $\bar{x}^0 \Rightarrow \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^0} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^0} \Delta x_n + o(\rho)$, $\rho \rightarrow 0$, где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$.
 $\Delta x_j \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, $j=1, \dots, n$.

Подставим в это соотношение $\Delta x_j = \Delta \varphi_j$, $j=1, \dots, n$: $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^0} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^0} \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^0} \Delta t_k + o(\rho) \right) +$
 $\dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^0} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^0} \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^0} \Delta t_k + o(\rho) \right) +$
 $\alpha_1 \Delta \varphi_1 + \dots + \alpha_n \Delta \varphi_n = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^0} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^0} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^0} \right) \Delta t_1 + \dots +$
 $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^0} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^0} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^0} \right) \Delta t_k + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^0} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^0} \right) o(\rho) + \alpha_1 \Delta \varphi_1 +$
 $\dots + \alpha_n \Delta \varphi_n = A_1 \Delta t_1 + \dots + A_k \Delta t_k + z$, где $z = o(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$, поскольку $z =$
 $= c \cdot o(\rho) + \alpha_1 \Delta \varphi_1 + \dots + \alpha_n \Delta \varphi_n$. Заметим, что $\Delta \varphi_j \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, но при $\rho \rightarrow 0$: $\Delta \varphi_j \rightarrow 0$ в мн.
 Значит, $\alpha_j \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, $j=1, \dots, n$.
 Далее, $|\Delta \varphi_j| = \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^0} \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^0} \Delta t_k + o(\rho) \right| \leq \rho \cdot \left(\left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^0} \right| \cdot \left| \frac{\Delta t_1}{\rho} \right| + \dots + \right.$
 $\left. + \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^0} \right| \cdot \left| \frac{\Delta t_k}{\rho} \right| + |o(1)| \right) \leq c_j \cdot \rho$. Отсюда $z = c \cdot o(\rho) + c_1 \rho \cdot o(1) + \dots + c_n \rho \cdot o(1) =$
 $= o(\rho)$, $\rho \rightarrow 0$. т.е.

Значит, $f(\bar{t})$ гур-ма, и её ЧП равны $A_1, \dots, A_k$ т.е. g .

Опр 4 Пусть Ф-ция f гур-ма в T . $\bar{x}^0$. Векторное $df \Big|_{\bar{x}^0} =$
 $= \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^0} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^0} \Delta x_n$ т.е. линейная комбинация прир-е Ф-ций Δx_j гур-мы в T . $\bar{x}^0$, соответ-им вектору при-
 ращения $\Delta \bar{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$. Если T . $\bar{x}^0$ фиксирована, то $df \Big|_{\bar{x}^0}$ -
 линейная Ф-ция перемен-ых $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$.

Т. 4 (инвариантность форм первого дифференциала)
 Пусть Ф-ция f гур-ма в T . $\bar{x}^0$. Её первый дифференциал имеет вид:

$$df|_{\vec{x}_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\vec{x}_0} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\vec{x}_0} dx_n, \text{ (ж) независимо от того,}$$

яв-ся $x_1, \dots, x_n$ независимыми переменными или групп-ми аргументов $t_1, \dots, t_k$.

Доказ-во: Пусть $x_j = \varphi_j(t_1, \dots, t_k), j=1, \dots, n$. Из Т.3 следует, что

$$df = \frac{\partial f}{\partial t_1} \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial t_k} \Delta t_k = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} \right) \Delta t_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \right) \Delta t_k = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} \Delta t_k \right)}_{dx_1} + \dots + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \Delta t_k \right)}_{dx_n}$$

$\Rightarrow$ выраз-и соот-е (ж).

Если $x_1, \dots, x_n$ - независимые перемен. то

$$dx_k = \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_1}}_{=0} \Delta x_1 + \dots + \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_k}}_{=1} \Delta x_k + \dots + \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_n}}_{=0} \Delta x_n = \Delta x_k \text{ и соот-е (ж) сразу}$$

следует из опред-е дифференциала ст.9.

Легко проверить Если групп-ми f, g групп-ми, то $d(f \pm g) = df \pm dg$;

$d(f \cdot g) = f dg + g df$; если $g \neq 0$, то $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f dg + g df}{g^2}$ (правильна групп-ми групп-ми и част-ми част-ми)

Доказ-во: 1) Обозначим $h = f \pm g$, тогда

$$dh = \underbrace{\frac{\partial h}{\partial f}}_{=1} df + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial g}}_{\pm 1} dg = 1 \cdot df \pm 1 \cdot dg = df \pm dg$$

$$2) h = f \cdot g \Rightarrow dh = \underbrace{\frac{\partial h}{\partial f}}_{=g} df + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial g}}_{=f} dg = g df + f dg$$

$$3) h = \frac{f}{g}, g \neq 0 \Rightarrow dh = \underbrace{\frac{\partial h}{\partial f}}_{=\frac{1}{g}} df + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial g}}_{=-\frac{f}{g^2}} dg = \frac{df}{g} - \frac{f dg}{g^2} = \frac{g df - f dg}{g^2} \text{ ст.9.}$$

Производная по направлению. Градиент

Пусть групп-е $f(x, y, z)$ опред-на в окрестности т. $M(x_0, y_0, z_0)$.

Рассмотрим вектор $\vec{e}$, т.е. $|\vec{e}|=1, \angle(\vec{e}, O_x) = \alpha; \angle(\vec{e}, O_y) = \beta;$

$\angle(\vec{e}, O_z) = \gamma$. Тогда $\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

направл-ие координат

Проведем через т. M прямую l , параллельно в-ру $\vec{e}$.



Будем считать: $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \cos \beta \\ z = z_0 + t \cos \gamma \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Подставим эти соотношения в функ-ию f , получим сложную функ-ию одной пере-ой: $g(t) = f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma)$. Она определена в некото-рой окрестн. т. $t=0$.

Впр. 5 Произ-й функ-ии f в т. М по направлению, задаваемо-му вектором $\vec{e}$, наз-ся возращение $g'(0)$. Обозначение: $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}|_M$.

Пусть функ-ия f диф-ма в т. М. Тогда g диф-ма в т. $t=0$ (как сложная функ-ия) и $g'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}|_M = \frac{\partial f}{\partial x}|_M \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}|_M \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z}|_M \cos \gamma$.
 Из случая ср-ции двух перемен-ых $f(x, y)$:
 $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}|_M = \frac{\partial f}{\partial x}|_M \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}|_M \sin \alpha$, где $\alpha = \angle(\vec{e}, \vec{e}_1)$.

Впр. 6 Пусть функ-ия f диф-ма в т. $M(x_0, y_0, z_0)$. Вектор $\{\frac{\partial f}{\partial x}|_M, \frac{\partial f}{\partial y}|_M, \frac{\partial f}{\partial z}|_M\}$ наз-ся градиентом функ-ии f в т. М и обознач-ся $\text{grad } f|_M$ или $\vec{\nabla} f|_M$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}|_M = (\text{grad } f|_M, \vec{e})$.

Ув. 2 (геометр. смысл градиента).

Вектор $\text{grad } f|_M$ показывает направление максимального роста функ-ии.

Д-во: $|\text{grad } f, \vec{e}| = |\text{grad } f| \cdot |\vec{e}| \cdot \cos \varphi$, φ - угол между $\vec{e}$ и $\text{grad } f$
 $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}|_M = |\text{grad } f| \cdot \cos \varphi \leq |\text{grad } f|$, при этом знак "=" достигается
 $\Leftrightarrow \varphi = 0 \Leftrightarrow \vec{e} \parallel \text{grad } f|_M$ и т.д.

Впр. 7 Пусть функ-ия $f(x_1, \dots, x_n)$ определена в окрестности т. $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$; вектор $\vec{e} = \{\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_n\}$, $\|\vec{e}\| = 1$. Рассмотрим функ-ию $g(t) = f(x_1^0 + t \cos \alpha_1, \dots, x_n^0 + t \cos \alpha_n)$. Производной функ-ии f в т. M_0 по нап-влению, задаваемому вектором $\vec{e}$, наз-ся возрастание

$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}|_{M_0} = g'(0)$. Если функ-ия f диф-ма в т. M_0 , то $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}|_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}|_{M_0} \cos \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{M_0} \cos \alpha_n = (\text{grad } f|_{M_0}, \vec{e})$. Здесь $\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \{\frac{\partial f}{\partial x_1}|_{M_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{M_0}\}$ - градиент функ-ии f в т. M_0 . Поскольку $(\text{grad } f, \vec{e}) \leq \|\text{grad } f\| \cdot \|\vec{e}\|$, при-чем "=" достигается $\Leftrightarrow \text{grad } f \parallel \vec{e}$.

То утвер-е о geometr. смысле градиента сохр-ся и в

связь произ-во кон-ва перемен-х.

Замечание Из диф-ти функ-и в т. следует наличие в этой т. край-й по любому направлению. Обратное, вообще неверно.

пример: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ $f(x,0) = 0 \Rightarrow f'_x(0,0) = 0$
 $f(0,y) = 0 \Rightarrow f'_y(0,0) = 0$.

Пусть $\vec{e} = \{\cos \alpha, \sin \alpha, \alpha \neq 0, \frac{\pi}{2}\}$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial e}|_{(0,0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{t^2 \cos^2 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha} = 0$

$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 0$ Значит, в т. (0,0) существует производные по всем напр-ям: При этом f даже не аб-се непрерыв-й в т. (0,0): $f(x,x^2) = \frac{x^4}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$.

§14. Производные высших порядков

Впр. 1 Пусть функ-я f определена в области D и всюду в D существует её ЧП $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. Если у функ-и $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ в т. $\vec{x}^0 \in D$ существует ЧП по перемен-й x_j , то эта ЧП наз-ся частной производ-й второго порядка от функ-и f в т. $\vec{x}^0$ и обоз-ся $f''_{x_k x_j}(\vec{x})$ или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_{\vec{x}^0} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} \right) \Big|_{\vec{x} = \vec{x}^0}.$$

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_m}} \Big|_{\vec{x}^0} = \frac{\partial}{\partial x_{k_m}} \left(\frac{\partial^{m-1} f(\vec{x})}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{m-1}}} \right) \Big|_{\vec{x} = \vec{x}^0}.$$

Если не все индексы $k_1, \dots, k_m$ совпад-т между собой, то такая ЧП наз-ся смешанной.

Впр. 2 Пусть функ-я f опред-на в окрестности т. $\vec{x}^0$. Будем говорить, что f m раз диф-ма в т. $\vec{x}^0$ ($m \geq 2$), если она $(m-1)$ раз диф-ма в некоторой окрестности т. $\vec{x}^0$, и все её ЧП порядка $(m-1)$ диф-мы в т. $\vec{x}^0$.

Т. 1 (достат. услов. m -кратной дифр-ти) $m \geq 2$

Пусть функ-я f определена в окрестности т. $\vec{x}^0$ и $(m-1)$ раз диф-ма в этой окрестности. Если все её ЧП порядка m существуют в некоторой окрестности т. $\vec{x}^0$ и непрерывны в

самой т. $\bar{x}^0$, то f и раз диф-ма в т. $\bar{x}^0$.

Док-во: Рассмотрим функ-ю $g(\bar{x}) = f_{x_{k_1} \dots x_{k_{m-1}}}(\bar{x})$, где $k_1, \dots, k_{m-1}$ - произв. набор индексов. Любая ЧП первого порядка функ-и g явл-ся ЧП m -го порядка функ-и $f \Rightarrow$ у функ-и g все ЧП сущ-т в окрестности т. $\bar{x}^0$ и непрер-ны в самой т. $\bar{x}^0 \Rightarrow$ функ-е g диф-ма в т. $\bar{x}^0$ (дейст. усл-е диф-ти). Значит, у функ-и f все ЧП порядка $(m-1)$ дифр-ны в т. $\bar{x}^0$. Она сама $(m-1)$ раз дифр-ма в окр-ти $\Rightarrow$ вышележащ. сур-е 2 в.г.

I.2 о равенстве смешанных произ-х, Юнг

Пусть функ-и $f(x, y)$ определена в окрест-ти т. (x_0, y_0) и дважды дифр-ма в т. (x_0, y_0) . Тогда $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

Д-во: Пусть $\delta > 0$, такое, что f'_x, f'_y сущ-ют в $B_\delta(x_0, y_0)$. Возьмем $h \in \mathbb{R}, |h| < \delta$. Рассмотрим вспомоц. функ-ю $\varphi(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)$.

Пусть $\Delta\varphi = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$, тогда $\Delta\varphi = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0)$ (*).

$$\begin{aligned} \text{С другой стороны, } \Delta\varphi &= \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) \stackrel{\text{т. Лагранж.}}{=} \varphi'(x_0 + \theta h) \cdot h = \\ &= (f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0)) \cdot h = \\ &= (f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0)) - (f'_x(x_0 + \theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0)) \cdot h \stackrel{\text{но сур. диф-ти}}{=} (f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot \theta h + f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot h + o(\sqrt{\theta^2 h^2 + h^2})) - (f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot \theta h + f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot 0 + o(\theta h)) \cdot h = \\ &= (f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot h + o(h)) \cdot h = f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot h^2 + o(h^2), h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим функ-ю $\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$. Пусть $\Delta\psi = \psi(y_0 + h) - \psi(y_0)$, тогда $\Delta\psi = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0) = \Delta\varphi$ в силу (*). Другими словами, аналог. предполож. можно показ-ать, что $\Delta\psi = f''_{yx}(x_0, y_0) \cdot h^2 + o(h^2), h \rightarrow 0$. Поскольку $\Delta\psi = \Delta\varphi$, то

$f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot h^2 + o(h^2) = f''_{yx}(x_0, y_0) \cdot h^2 + o(h^2)$. Значит $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) + o(1)$, но ЧП второго порядка не зависит от $h \rightarrow f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ в.г.

I.3 о равенстве смешанных произ-х, Ивара

Пусть функ-е f опред-на в окр-ти т. (x_0, y_0) ; в этой окрестности

$\exists f''_{xy}, f''_{yx}$, причём они непрер-ны в (x_0, y_0) . Тогда $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

Д-во: Пусть $\delta > 0$ таково, что $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ сущ-ют в

$f(x_0, y_0)$; $h \in \mathbb{R}$, $|h| \leq \delta$. Рассмотрим ф-ии ψ и Ψ , опред-е в Т.2, и заметим, что $\Delta\psi = \Delta\Psi$. С другой стороны, $\Delta\psi = \psi(x_0+h) - \psi(x_0) = \psi'(x_0+h) \cdot h = (f'_x(x_0+h, y_0+\delta h) - f'_x(x_0+h, y_0)) \cdot h \stackrel{\text{Т.1}}{=} f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\delta h) \cdot h \cdot h$
 $\stackrel{\text{Т.1}}{=} (f''_{xy}(x_0, y_0) + o(1)) \cdot h^2$, $h \rightarrow 0$. Но $\Delta\psi = \Delta\Psi \stackrel{\text{Т.2}}{=} (f''_{xy}(x_0, y_0) + o(1)) \cdot h^2$, $h \rightarrow 0$.

Аналогично $\Delta\Psi = (f''_{yx}(x_0, y_0) + o(1)) \cdot h^2$, $h \rightarrow 0$. Но $\Delta\psi = \Delta\Psi \Rightarrow f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ как и в Теор.2 эт.д.

Следствие из Т.2 Пусть ф-ии $f(x_1, \dots, x_n)$ опред-на в некоторой окрестности Т. $\bar{x}$ и m раз диф-на в Т. $\bar{x}$. Тогда значение любой ЧП порядка m ф-ии f в Т. $\bar{x}$ не зависит от порядка диф-ла.

Доказ. Заметим, что достаточно доказать: $f^{(m)}_{x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m}(\bar{x}) = f^{(m)}_{x_1, \dots, x_{j+1}, x_j, \dots, x_m}(\bar{x})$. Обозначим, $g(\bar{x}) = f^{(j-2)}_{x_1, \dots, x_{j-2}}(\bar{x})$. Если рассматр.

ф-ию g как ф-ию переменных x_{j-1}, x_j , то она $(m-j+2)$ раз диф-на в Т. $\bar{x}$ и $(m-j+1)$ раз - в окрестн. Если $j=m$, то ф-ия g дважды диф-на в Т. $\bar{x} \Rightarrow g''_{x_{j-1}x_j}(\bar{x}) = g''_{x_jx_{j-1}}(\bar{x}) \Rightarrow$ впол-е (**).

Если $j < m$, то $-j+m+1 \geq 2$ и ф-ия g по крайней мере дважды диф-на в окрестн. Т. $\bar{x} \Rightarrow$ впол-е в окрестности: $g''_{x_{j-1}x_j}(\bar{x}) = g''_{x_jx_{j-1}}(\bar{x})$. Продиф-м это равенство по $x_{j+1}, \dots, x_m$, получим (**) эт.д.

Пример $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

$f(0,0) \equiv 0 \Rightarrow f'_x(0,0) = 0$. $f(0,y) \equiv 0 \Rightarrow f'_y(0,0) = 0$.

Пусть $(x,y) \neq (0,0)$, тогда $f'_x(x,y) = \left(\frac{x^2y - y^3}{(x^2+y^2)^2} \right) = \frac{-y^5 - 2x^2y + 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$. Аналогично $f'_y(x,y) = \frac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Заметим, что $f'_x(0,y) = -y \Rightarrow f''_{xy}(0,0) = -1$. Далее, $f'_y(x,0) = x \Rightarrow f''_{yx}(0,0) = 1$.

§15. Дифференциальные внешние производные. Формула Тейлора.

Опр.1 Пусть ф-ии f опред-на в окрестн. Т. $\bar{x}$ и дважды дифференцируема в Т. $\bar{x}$. Тогда, ее первое диф-л df существует в окрестн.

интерес-ти т. $\bar{x}^0$. Положим в выражении где $df: \Delta x_i = h_i, \dots, \Delta x_n = h_n$, тогда функ-я $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot h_n$ диф-ма в т. $\bar{x}^0$ (как обычная диф-я функ-ий). Её диф-л $d(df)|_{\bar{x}^0} = d\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot h_k\right)|_{\bar{x}^0} = \sum_{k=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)|_{\bar{x}^0} \cdot h_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_{\bar{x}^0} \cdot \Delta x_j \cdot h_k$. Если положить $h_k = \Delta x_k = dx_k$, то получим второе вкр-е $d^2 f|_{\bar{x}^0} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_{\bar{x}^0} dx_k dx_j$ наз-е вторым дифференциалом (диф-ом 2-го порядка) функ-и f в т. $\bar{x}$, сост-м приращен-ем аргументов $dx_1, \dots, dx_n$. Аналогично, если f m раз диф-ма в т. $\bar{x}$, то её диф-л порядка m -го вкр-е

$$d^m f|_{\bar{x}} = \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_m}} \Big|_{\bar{x}} dx_{k_1} \dots dx_{k_m}.$$

Замечание Мы уже знаем, что первый диф-л $df|_{\bar{x}^0}$ - линейная функ-я (функционал) перемен-х $dx_1, \dots, dx_n$. Его можно представить в виде: $df|_{\bar{x}^0} = (\vec{\nabla} f, \vec{\Delta x})$, где $\vec{\Delta x} = \{dx_1, \dots, dx_n\}$ - вектор приращ-ий.

Второй диф-л явл-ся квадратичн. функ-ей переменных $dx_1, \dots, dx_n$: $d^2 f|_{\bar{x}^0} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj} dx_k dx_j$. Такой объект наз-е квадрат. формой (КФ).

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ наз-е матрицей КФ. Поскольку $a_{kj} = a_{jk}$ (равенство смешанных произ-х), то матрица

A симметрична, КФ - симметр. матр также наз-е сим. КФ.

Заметим ещё, что диф-лы порядка $m \geq 2$, уже не обладают, вообще говоря, свойствами инвариантности форм.

Т.1 (ф-ла Тейлора с остат. членом в форме Лангранжа)

Пусть функ-я f $(m+1)$ раз диф-ма в $\mathcal{B}_\delta(\bar{x})$. Тогда $\forall x \in \mathcal{B}_\delta(\bar{x})$ закон:

$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{1}{1!} df|_{\bar{x}^0} + \frac{1}{2!} d^2 f|_{\bar{x}^0} + \dots + \frac{1}{m!} d^m f|_{\bar{x}^0} + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f|_{\bar{x}^0 + \theta(x-\bar{x}^0)} (1)$. Здесь все диф-лы сост-т приращ-ем аргументов $x - x^0, \dots, x_n - x_n^0$.

Доказ-во: Рассмотрим вспомогател-ую ф-ию $g(t) = f(\bar{x} + t(x - \bar{x}^0)) = f(x_1^0 + t(x_1 - x_1^0), \dots, x_n^0 + t(x_n - x_n^0))$. Эта функ-я $(m+1)$ раз диф-ма в $\mathcal{B}_\delta(\bar{x})$, причём $g(0) = f(\bar{x})$. Заметим также, что $g(1) = f(x)$, и т. $\bar{x}$ лежит в окрестности т. 0, в к-рой g определена и $(m+1)$ раз диф-ма.

(g диф-ма как сложная ф-ция). Разложим функ-ию g в т. $t=1$ по ф-ле Маклорена с ост. Лангранжа: $g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}(1-0) + \frac{g''(0)}{2!}(1-0)^2 + \dots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!}(1-0)^m + \frac{g^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}(1-0)^{m+1}$.

Заметим, что $g'(t) = df|_{\bar{x} + t(x-\bar{x}^0)}$, следовательно $g'(0) = df|_{\bar{x}^0}$, $g''(0) = d^2 f|_{\bar{x}^0}$, $\dots$, $g^{(m)}(0) = d^m f|_{\bar{x}^0}$. Тогда $g(1) = f(x) = f(\bar{x}) + \frac{1}{1!} df|_{\bar{x}^0} + \frac{1}{2!} d^2 f|_{\bar{x}^0} + \dots + \frac{1}{m!} d^m f|_{\bar{x}^0} + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f|_{\bar{x}^0 + \theta(x-\bar{x}^0)} (1)$.

$$(1-0)^2 + \dots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!} (1-0)^m + \frac{g^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} (1-0)^{m+1}, \quad 0 < \theta < 1. \quad \text{Since, } g'(0) =$$

$$\cdot (x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0) = d^2 f / dx^2 \cdot \quad \text{ll } \tau, \sigma \quad g^{(m)}(0) = d^m f / dx^m, \quad g^{(m+1)}(0) = d^{m+1} f / dx^{m+1}$$

показали эти вы-е в (ххх), помучим (1), зг-г.

Пусть f — чл. f (см-1) раз гир-ма в окрест-ти $\tau. \bar{x}^0$) и n раз гир-ма в $\tau. \bar{x}^0$. Тогда $\exists \delta > 0$, т.е. $\forall x \in B_\delta(\bar{x}^0)$:

Сост-т прир-дм $X_1 - X_1^0, \dots, X_n - X_n^0$.

Хотим показать, что $f_m(\bar{x}) = o(g^m)$, $g \rightarrow 0$.

Ex-60: (unreg. no m). $m=1$: $f_1(\bar{x}) = f(\bar{x}) = f(x^*) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}} (x_1 - x_1^*) - \dots - \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}} (x_n - x_n^*)$

Предположим, что верно где-нибудь и где (и).

$$\frac{\partial f_M}{\partial x_i} = \frac{\partial f_M}{\partial x_i} \Big|_{x^0} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f(x) - f(x^0) - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} \cdot \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_{j-1}=1}^n \frac{\partial^j f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{j-1}}} \Big|_{x^0} (x_{k_1} - x_{k_1}^0) \dots (x_{k_{j-1}} - x_{k_{j-1}}^0) \right)$$

$$= \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} - \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{i-1} j^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\bar{x}} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}} - \sum_{j=1}^{i-1} j^{-1} d^j \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\bar{x}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\bar{x}}$$

Мн. пред. по верно же м-1. Доц. же м. Гун-а $\frac{2f}{2x}$ (м-1)
раз гун-а в т. х° $\Rightarrow$ по пред. инд. все 407 до пор-ка см-1)
обр. в 0 в т. х° гун-и $\frac{2f}{2x}$. в выбранных произ-но $\Rightarrow$
у гун-и f все 407 до порядка n равны 0 в т. х°.
Самая она обр-се в 0 (проб-ли непосред-но). 25.9

1.2 (ф-м Тейлора с ос. Ланго)

Предположение доказательства.

1.2. Пусть ф-ция $g(x)$ m раз диф-ма в т. $\bar{x}$. Если она обращается в 0 в т. $\bar{x}$ вместе со всеми ЧП до порядка m вклю-чительно, то $g(x) = o(\rho^m)$, $\rho \rightarrow 0$, где $\rho = \rho(\bar{x}, \bar{x})$.

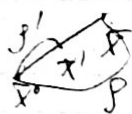
Д-во: (инд. по m): при $m=1$ ф-ция $g(x)$ диф-ма в т. $\bar{x} \Rightarrow$ по определению $g(x) - g(\bar{x}) = \frac{\partial g}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}} (x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}} (x_n - \bar{x}_n) + o(\rho)$, $\rho \rightarrow 0$.
 $\Rightarrow g(x) = o(\rho)$, $\rho \rightarrow 0$.

Предположим, что верно для $m-1$, дока-м для m .

Пусть g m раз диф-ма в т. $\bar{x}$, и все её ЧП порядка $0, 1, \dots, m-1$ равны 0 в т. $\bar{x}$. По определению производной замечим, что ф-ция $\frac{\partial g}{\partial x_k}$ $(m-1)$ раз диф-ма в т. $\bar{x}$, и все её ЧП порядка $0, 1, \dots, m-1$ равны 0 в т. $\bar{x}$ (по определению). Значит, по

предположению индукции, $\frac{\partial g}{\partial x_k} = o(\rho^{m-1})$, $\rho \rightarrow 0$. Теперь запишем для функции g ф-лу Тейлора с ос. Ланго (хвосток g диф-ма в т. $\bar{x}$ m раз, $m \geq 2 \Rightarrow$ она диф-ма по крайней мере один раз в окрестн. т. $\bar{x}$): $g(x) = g(\bar{x}) + \frac{1}{1!} dg \Big|_{\bar{x}} \cdot \frac{1}{\rho} (x - \bar{x}) + o(\rho)$, $0 < \rho < 1$. $\Rightarrow$

$$|g(x)| = \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}} (x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}} (x_n - \bar{x}_n) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial g}{\partial x_k} \Big|_{\bar{x}} \right| \cdot |x_k - \bar{x}_k| \leq \sum_{k=1}^n \underbrace{\left| \frac{\partial g}{\partial x_k} \Big|_{\bar{x}} \right|}_{= o(\rho^{m-1}), \rho' = \rho(\bar{x}, \bar{x}) < \rho} \cdot |x_k - \bar{x}_k| \leq o(\rho^{m-1}) \cdot \sum_{k=1}^n |x_k - \bar{x}_k| \leq n \cdot \rho = o(\rho^m), \quad \text{т.е. } g.$$



Для дока-ва Т. нужно в д.е в качестве ρ взять ф-цию ρ_{m-1} , т.е. ρ .

Экстремум функции

многих переменных

опр. 2 Пусть f определена в некоторой окрестности т. $\bar{x}$. Она имеет в т. $\bar{x}$ (строгий) локальный максимум, если $\exists \delta > 0 : f(\bar{x}) > f(x) \forall x \in \rho_\delta(\bar{x})$, (строгий) локальный минимум, если $\exists \delta > 0 ;$

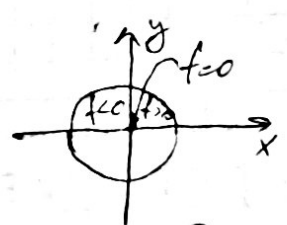
$f(\bar{x}^0) = f(\bar{x}) \quad \forall x \in \bar{X}(\bar{x})$.
Т.3 (необходимые условия локального экстремума) Если f имеет ЧП по всем переменным в т. $\bar{x}^0$ локального экстремума, то $\left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{\bar{x}^0} = 0$, $k=1, \dots, n$.

Д-во: Возьмем произвольное k от 1 до n и рассмотрим ф-цию $g(x_k) = f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0)$. Если f имеет экстремум в т. $\bar{x}^0$, то g имеет экстремум в т. $x_k^0 \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{\bar{x}^0} = g'(x_k^0) = 0$

Замеч-е: Условия равенства нулю всех ЧП ф-ции в т. не являются достаточными условиями экстр.

Например, $f(x,y) = xy$, $\begin{cases} f'_x = y = 0 \\ f'_y = x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{т. } (0,0) - \text{стационарная (седловая на экстр.)}$

При этом экстр. в $(0,0)$ нет.



Впр.3 Пусть $A(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j$ - квадрат. форма (КФ), $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Показат, что КФ A ~~называется~~ является положительно (отрицательно) определенной, если $\forall$ набор $(h_1, \dots, h_n)$, $h_1^2 + \dots + h_n^2 \neq 0$, выполнено:

$A(h_1, \dots, h_n) > 0$ (< 0). Будем писать $A > 0$ ($A < 0$). КФ A называется знакоопределенной, если $\exists$ набор $(h'_1, \dots, h'_n)$ и $(h''_1, \dots, h''_n)$, т.е. $A(h'_1, \dots, h'_n) > 0$, $A(h''_1, \dots, h''_n) < 0$.

Замечание возможно третье значение: например, $A(h_1, h_2) = h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_2^2$. $A(h_1, h_2) \geq 0$, но $A(h_1, h_2) = 0$ на неупр. набор.

Т.4 (достат. усл-е экстр-ма)

Пусть ф-ция f диф-ма в окрестности т. $\bar{x}^0$ и дважды диф-ма в самой т. $\bar{x}^0$. Если $df|_{\bar{x}^0} = 0$, $d^2f|_{\bar{x}^0} > 0$ (< 0) как КФ переменных $dx_1, \dots, dx_n$, то $\bar{x}^0$ - т. локал. макс (мин). Если $d^2f|_{\bar{x}^0}$ - знакоперемен. КФ, то экстремума в т. $\bar{x}^0$ нет.

Д-во: 1) Пусть $d^2f|_{\bar{x}^0} > 0$ (аналогично < 0 - аналогично) Из Т.2 $\Rightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{x}^0) + \frac{1}{1!} df|_{\bar{x}^0} + \frac{1}{2!} d^2f|_{\bar{x}^0} + o(\xi^2)$, $\xi \rightarrow 0$, где $\bar{x}$ лежит в некоторой окрестности т. $\bar{x}^0$.

Поскольку $df|_{\bar{x}^0} = 0$, то $f(\bar{x}) - f(\bar{x}^0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}_{a_{ij}} \big|_{\bar{x}^0} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + O(\rho^3) =$
 $= \frac{\rho^2}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \underbrace{\frac{x_i - x_i^0}{\rho}}_{h_i} \cdot \underbrace{\frac{x_j - x_j^0}{\rho}}_{h_j} + O(1) \right) =$

$= \frac{\rho^2}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j + O(1) \right) (*)$. Пусть $A(h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j$. Заметим,
 $h_1^2 + \dots + h_n^2 = 1 \Rightarrow$ КР A опред.-на на един. сфере $S_1(0) \subset \mathbb{R}^n$.

Функт. $A(h_1, \dots, h_n)$ непрерывна на ограниченном замкнутом мн-ве $S_1(0)$
 $\Rightarrow$ достигает на этом мн-ве своей точной нижней грани, т.е.
 $\exists (h_1, \dots, h_n) \in S_1(0) : A(h_1, \dots, h_n) = m = \inf A(h_1, \dots, h_n)$. Из условия Т-мн
 $\Rightarrow A > 0$, значит $m = A(h_1, \dots, h_n) > 0$. $\Rightarrow A(h_1, \dots, h_n) \geq m > 0 \forall (h_1, \dots, h_n) \in S_1(0)$. Отсюда и из соот-я (*) $\Rightarrow \exists \delta > 0$, т.е. $\forall x \in B_\delta(\bar{x}^0)$:

$f(\bar{x}) - f(\bar{x}^0) = \underbrace{\frac{\rho^2}{2} \cdot A(h_1, \dots, h_n)}_{\geq m} + \underbrace{O(\rho^3)}_{|1| < \frac{\rho}{2}} > 0 \Rightarrow \bar{x}^0$ - т. локал. минимума.

2) Пусть $df|_{\bar{x}^0}$ - знакоперем. КР, тогда $A(h)$ - тоже знакопер. КР.

Значит, $\exists (h_1', \dots, h_n') \in S_1(0)$, $\exists (h_1'', \dots, h_n'') \in S_1(0)$, т.е. $A(h_1', \dots, h_n') > 0$;
 $A(h_1'', \dots, h_n'') < 0$. Возьмем произ-е $\rho > 0$ и обозначим $\bar{x}' = (x_1^0 + \rho \cdot h_1', \dots, x_n^0 + \rho \cdot h_n')$;
 $\bar{x}'' = (x_1^0 + \rho \cdot h_1'', \dots, x_n^0 + \rho \cdot h_n'')$. Тогда $\rho(\bar{x}', \bar{x}'') = \rho \cdot \sqrt{(h_1')^2 + \dots + (h_n')^2} = \rho$;
 $\rho(\bar{x}'', \bar{x}^0) = \rho$. Из соот-я (*) $\Rightarrow f(\bar{x}') - f(\bar{x}^0) = \frac{\rho^2}{2} (A(h_1', \dots, h_n') + O(1))$

$\Rightarrow \exists \delta' > 0$, т.е. $\forall \bar{x}' \in B_{\delta'}(\bar{x}^0) : f(\bar{x}') - f(\bar{x}^0) > 0$. Аналогично $\Rightarrow \exists \delta'' > 0$, т.е. $\forall \bar{x}'' \in B_{\delta''}(\bar{x}^0) : f(\bar{x}'') - f(\bar{x}^0) < 0$. Положим $\delta_0 = \min\{\delta', \delta''\}$, тогда
 $\forall \delta \in (0, \delta_0)$ в $B_\delta(\bar{x}^0)$ найдутся т. $\bar{x}'$ и $\bar{x}''$, т.е. $f(\bar{x}') > f(\bar{x}^0)$; $f(\bar{x}'') < f(\bar{x}^0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ экстр. нет зт.з.

Теорема (критерий Симпсона, без g-ва)

Пусть A - симметричная КР с матрицей $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.
 Обозначим $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, ..., $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ - главные миноры
 матриц A .

КР $A > 0 \Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

КР $A < 0 \Leftrightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$, и т.д. (знаки чередуются)

Пример $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xyz \rightarrow \text{ext}$.

$\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \\ f'_y = 4y + 2z = 0 \\ f'_z = 2z + 2y = 0 \end{cases}$

$M(0, 0, 0)$ - един. крит.-я точка; $f'_x = 2, f'_y = 4, f'_z = 2$,
 $f''_{xx} = 2, f''_{yy} = 4, f''_{zz} = 2$,
 $f''_{xy} = 0, f''_{yz} = 0, f''_{zx} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{КР локал. экстр-ма.}$$

или: $d^2f|_M = 2\delta x^2 + 4\delta y^2 + 2\delta z^2 + 4\delta y\delta z = 2(\delta x^2 + (\delta y + \delta z)^2 + \delta y^2) =$
 при этом $d^2f|_M = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta x = 0 \\ \delta y + \delta z = 0 \\ \delta y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \delta x = \delta y = \delta z = 0 \Rightarrow d^2f|_M > 0 \Rightarrow M -$

Следствие из Т.4 Пусть функ-я $f(x, y)$ задана в окр-ти T и является экстр-ма в T ; пусть $df|_M = 0$. Обозначим $A = f''_{xx}(M)$, $B = f''_{xy}(M)$, $C = f''_{yy}(M)$, $D = AC - B^2$. Тогда

- 1) если $A > 0, D > 0$, то M - т. локал. минимума,
- 2) если $A < 0, D > 0$, то M - т. локал. максимума
- 3) $D < 0 \Rightarrow$ экстремума в T нет.

Замечание: $d^2f|_M = A\delta x^2 + 2B\delta x\delta y + C\delta y^2$ - квадратичн. трёхчлен с постоянным дискриминантом $\Delta = B^2 - AC$. Если $D > 0$, то $\Delta < 0 \Rightarrow d^2f|_M$ сохраняет знак: $A > 0 \Rightarrow d^2f|_M > 0$; $A < 0 \Rightarrow d^2f|_M < 0$. Если $D < 0$, то $\Delta > 0 \Rightarrow d^2f|_M$ - знакопеременная КР ст. 2.

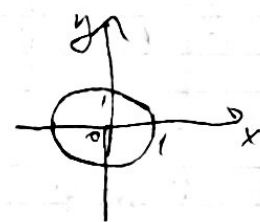
Замечание В случае $D = 0$ требует дополнительного исследования.

Например, 1) $f(x, y) = x^4 + y^4$, $M(0, 0)$. $f''_{xx}|_M = 12x^2|_M = 0$, $f''_{yy}|_M = 12y^2|_M = 0 \Rightarrow D = 0$. При этом очевидно, что M - т. минимума $f''_{xy} = 0 \Rightarrow$
 2) $f(x, y) = x^3y^3$, $M(0, 0)$. $f''_{xx} = 6xy^3|_M = 0$, $f''_{yy} = 6x^3y|_M = 0$, $f''_{xy} = 6x^2y^2|_M = 0 \Rightarrow D = 0$. При этом экстр. в M нет.

§

§16. Функции, заданные неявно.

Рассм. ур-е $x^2 + y^2 = 1$. Хотим выразить из этого ур-я функ-ю $y = y(x)$ (хотя бы в некоторой окр-ти данной T). Например, для $T(0, 1)$ $\exists$ окр-ть в к-ой есть единств.



решение - функ-я $y = \sqrt{1-x^2}$. В то же время, в любой окрестности $T(1, 0)$ есть по крайней мере 2 решения: $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, а на самом деле - бесконечно много.

Т.1 Пусть 1) функ-я $F(x_1, \dots, x_n, y)$ определена и дифференцируема в нек-ой окрест-ти T . $\bar{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$;
 2) $\nabla_y F$ непр-на в T . $\bar{x}^0$

3) $F(\bar{x}') = 0$; 4) $\frac{\partial F}{\partial y}|_{\bar{x}'} \neq 0$.

Тогда верно $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.е. $\forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{x}')$, где $\bar{x}' = (x_1', \dots, x_n') \in \mathbb{R}^n$, $\exists y = y(\bar{x})$, т.е. $F(\bar{x}, y(\bar{x})) = 0 \quad \forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{x}')$ и $|y(\bar{x}) - y'| < \varepsilon \quad \forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{x}')$.

При этом ф-ция $y(\bar{x})$ непрер-на и диф-ма в $B_\delta(\bar{x}')$.

Д-во: Заметим, что из непрер-ти чл $\frac{\partial F}{\partial y}$ в т. $\bar{x}'$ следует, что $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ в некоторой окр-ти т. $\bar{x}'$. Рассмотрим случай $\frac{\partial F}{\partial y}|_{\bar{x}'} > 0$ (случай < 0 - аналогично). Возьмём н-о такое, что ф-ция F непрер-на и диф-ма в $B_h(\bar{x}')$, причём $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ в этой окр-ти.

Возьмём $\varepsilon_0 = \frac{h}{2}$. Тогда $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ отрезок $[y' - \varepsilon, y' + \varepsilon] \subset B_h(\bar{x}')$. Обозначим

$g(y) = F(\bar{x}', y)$. Поскольку $g'(y) = \frac{\partial F}{\partial y} > 0$

при $y \in [y' - \varepsilon, y' + \varepsilon]$, то g возр-ет на $[y' - \varepsilon, y' + \varepsilon]$.

Т.к. $g(y') = F(\bar{x}') = 0$, то $g(y' - \varepsilon) < 0$,

$g(y' + \varepsilon) > 0$. Значит, $F(\bar{x}', y' - \varepsilon) < 0$,

$F(\bar{x}', y' + \varepsilon) > 0$. Фун-я F непрер-на

всюду в $B_h(\bar{x}')$ $\Rightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т.е. $F(\bar{x}, y' - \varepsilon) < 0$, $F(\bar{x}, y' + \varepsilon) > 0 \quad \forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{x}')$.

Пусть теперь $\bar{x} \in B_\delta(\bar{x}')$; обозначим $g_1(y) = F(\bar{x}, y)$. $g_1(y' - \varepsilon) < 0$, $g_1(y' + \varepsilon) > 0 \Rightarrow g_1$ возр-ет на отрезке $[y' - \varepsilon, y' + \varepsilon]$. Значит, $\exists y^1 = y^1(\bar{x})$, т.е. $F(\bar{x}, y^1) = 0$. При этом $|y^1 - y'| < \varepsilon$. Это можно считать $y(\bar{x})$.

для любой т. из $B_\delta(\bar{x}')$ $\Rightarrow$ в этой окр-ти $\exists$ ф-ия $y(\bar{x})$, т.е.

$F(\bar{x}, y(\bar{x})) = 0$ и $|y(\bar{x}) - y'| < \varepsilon$, (из $y' - \varepsilon$ и $y' + \varepsilon$ и един-тв доказаны).

Докажем непрер-ть построенной ф-ции. Непр-ть в т. $\bar{x}'$ уже доказана. Возьмём произ-ую т. $\bar{x}' \in B_\delta(\bar{x}')$ что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$, т.е.

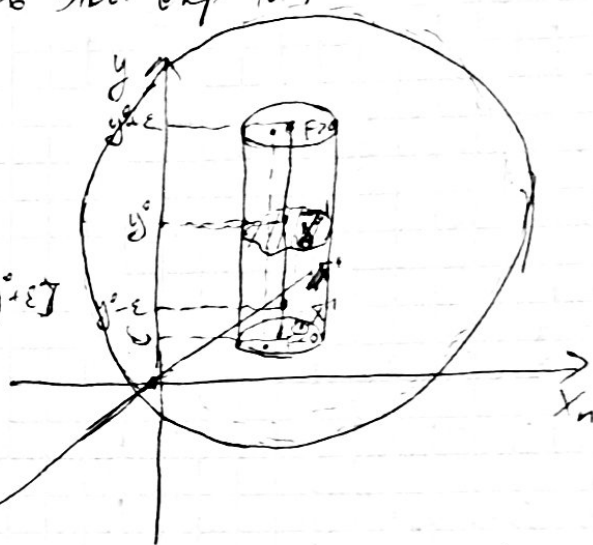
$\forall \bar{x} \in B_{\delta_1}(\bar{x}')$: $|y(\bar{x}) - y(\bar{x}')| < \varepsilon \Rightarrow$ ф-ия $y(\bar{x})$ непрер-на в т. $\bar{x}'$. т.е.

Докажем диф-ть. Фун-я $F(\bar{x}, y)$ диф-ма в $B_h(\bar{x}')$ $\Rightarrow \forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{x}')$

: $F(\bar{x} + \Delta \bar{x}, y(\bar{x} + \Delta \bar{x})) - F(\bar{x}, y(\bar{x})) \in$ т.к. $y(\bar{x})$ - решение ур-я $F = 0$

$$\approx \frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \Delta x_n + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \dots + \alpha_n \Delta x_n + \alpha \Delta y, \text{ где}$$

все з.д. в т. $(\bar{x}, y(\bar{x}))$; $\Delta \bar{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$; $\Delta y = y(\bar{x} + \Delta \bar{x}) - y(\bar{x})$; где



все функции $\alpha_i, \alpha \rightarrow 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \vdots \\ \Delta x_n \rightarrow 0 \end{cases}$. Заметим, что в силу вып.

функций $y_i(x)$ в $B(x)$: $y_i \rightarrow 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \vdots \\ \Delta x_n \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow$ можно утверждать, что

все функции $\alpha_i, \alpha \rightarrow 0$ при $\alpha_i \rightarrow 0$. Выразим из неявного равенства

вект. Δy : $\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \alpha \neq 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0 \right) \Delta y = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y} + \alpha} \cdot \Delta x_1 - \dots - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial y} + \alpha} \cdot \Delta x_n$

$$- \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y} + \alpha} \Delta x_1 - \dots - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial y} + \alpha} \Delta x_n = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \Delta x_1 - \dots - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \Delta x_n + \alpha \cdot \Delta x_1 + \dots + \alpha \cdot \Delta x_n$$

$\alpha_k \rightarrow 0, k=1, \dots, n$
 $\frac{\partial F}{\partial x_k} \rightarrow 0$

$$\frac{A}{0.42} = A \cdot \frac{1}{b} (1 + \frac{\alpha}{b})^{-1} = \frac{A}{b} (1 - \frac{\alpha}{b} + o(\alpha)) = \frac{A}{b} + \alpha, \text{ где } \alpha \rightarrow 0.$$

$\forall \epsilon > 0, b \neq 0$ $y(x)$ вып-на в точке $\bar{x} \in B(x)$.

Т2 (о разрешимости систем систем групп-ххх ур-ий)

Рассмотрим систему ур-ий: $\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \quad (1).$

Матрица $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$ наз-ся матрица Якоби групп-ий $F_1, \dots, F_m$ по переменным $y_1, \dots, y_m$. Ее определитель будет наз-ть якобианом и обоз-ть $\frac{\Delta(F_1, \dots, F_m)}{\Delta(y_1, \dots, y_m)}$. Пусть

- 1) групп-ии $F_1, \dots, F_m$ опред-ны и непрерыв-ны в некото-рой окрест-и т. $\bar{x}' = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0) \in \mathbb{R}^{n+m}$
- 2) все частные производ-ые $\frac{\partial F_k}{\partial y_j}, 1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq m$, непрер-ны в т. $\bar{x}'$
- 3) $F_1(\bar{x}') = 0, \dots, F_m(\bar{x}') = 0$;
- 4) $\frac{\Delta(F_1, \dots, F_m)}{\Delta(y_1, \dots, y_m)} \Big|_{\bar{x}'} \neq 0$

Тогда $\forall \epsilon_1, \dots, \epsilon_m > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$, т.е. $\forall x \in B_\delta(\bar{x}')$, где $\bar{x}' \in (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, $\exists!$ набор $y_1(x), \dots, y_m(x)$ функ-ий, которые явл-ся решениями системы (1) в данной окрест-ти, и $|y_1(x) - y_1^0| < \epsilon_1, \dots, |y_m(x) - y_m^0| < \epsilon_m \forall x \in B_\delta(\bar{x}')$. При этом все групп-ии $y_1, \dots, y_m$

непрерывна и диф-на в $B_2(\bar{x})$.

2-во: (индукция по m): при $m=1$ получаем изв-е 7.1 $\Rightarrow$ база верна. Пусть верно для $m-1$, докажем для m . Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$. Обозначим ее опред-ке через Δ . По зн-ю теоремы $\Delta|_{\bar{x}} \neq 0$.

Тогда хотя бы один из его миноров пор-ка $(1-1)$ отличен от 0. Перенумеруем функции

и переменные так, чтобы $\Delta_m|_{\bar{x}} \neq 0$, где $\Delta_m = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} \end{vmatrix}$. Обозначим через $\Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}$ алгебраические дополнения к эл-м последнего столбца

матр-цы Δ . Поскольку $\Delta_m|_{\bar{x}} \neq 0$, то по пред-ю индукции можем выразить из первых $(m-1)$ ур-ий системы (1) функции $y_1, \dots, y_{m-1}$: $\forall \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1} > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1})$, т.е. $\forall (x_1, \dots, x_n, y_m) \in B_2(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, y_m^0)$ $\exists!$ набор функций $y_1(x_1, \dots, x_n, y_m), \dots, y_{m-1}(x_1, \dots, x_n, y_m)$, к-рые явл-ся решениями первых $(m-1)$ ур-я системы (1) в этой окр-ти; $|y_i - y_i^0| < \varepsilon_1, \dots, |y_{m-1} - y_{m-1}^0| < \varepsilon_{m-1}$ всегда в окр-ти. При этом все функции $y_1, \dots, y_{m-1}$ диф-ны в указ-ой окр-ти.

Подставим функции $y_1, \dots, y_{m-1}$ в функцию F_m : $F_m(x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n, y_m), \dots, y_{m-1}(x_1, \dots, x_n, y_m), y_m) = \Psi(x_1, \dots, x_n, y_m)$ (2). Хотим проверить, что функция Ψ удов-т усл-ям 7.1. Она диф-на в некоторой окр-ти $T(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, y_m^0)$ как композиция диф-х функций.

$\Psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, y_m^0) = F_m(\bar{x}) = 0$ по усл-ю теоремы. Осталось проверить, что $\frac{\partial \Psi}{\partial y_m}$ непрерывна и стремится к 0 в $T(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, y_m^0)$. Вычислим эту ЧП.

Продифференцируем первые $m-1$ ур-я системы (1) и восп-ем (2):

При $1 \leq k \leq m-1$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_k}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial y_{m-1}} \frac{\partial y_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_k}{\partial y_m} &= 0 \quad | \cdot \Delta_k \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} \frac{\partial y_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y_m} \quad | \cdot \Delta_m \end{aligned} \right\} +$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_j} \Delta_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_j} \Delta_m \right) \cdot \frac{\partial y_j}{\partial y_m}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y_j} \Delta_j + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_j} \Delta_m \right) \cdot \frac{\partial y_j}{\partial y_m} + \left(\frac{\partial F}{\partial y_m} \Delta_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_m} \Delta_m \right) = \frac{\partial F}{\partial y_m} \cdot \Delta_m \quad \text{в)} \\ \text{"по т.о. о равенстве"} \quad \text{"\Delta 1 раз-е по y_m"} \\ \text{по т.о. о равенстве}$$

$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y_m} \cdot \Delta_m = \Delta_m$ Поскольку все чл $\frac{\partial F}{\partial y_j}$ непрер-н в $T, \bar{x}'$, то средние Δ и Δ_m все непрер. ф-ции, $\Delta_m|_{\bar{x}'} \neq 0 \Rightarrow$ в силу непрер-ти $\Delta_m \neq 0$ в некоторой окр-ти $T, \bar{x}'$.

Значит, в некоторой окр-ти $T, (x_1^0, \dots, x_n^0, y_m^0)$: $\frac{\partial F}{\partial y_m} = \frac{\Delta}{\Delta_m}$ - непрер-н и определена от нуля в $T, (x_1^0, \dots, x_n^0, y_m^0)$.

Значит, функ-я Ψ удовл-т всем условиям т.1 $\Rightarrow \forall \varepsilon_m > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon_m, \delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1})) > 0$ т.2. $\forall x \in V_\delta(\bar{x}) \exists!$ функ-я $y_m(x),$ т.2.

$\Psi(\bar{x}, y_m(x)) = 0$ в $V_\delta(\bar{x}^0)$; $|y_m - y_m^0| < \varepsilon_m$. При этом функ-я y_m диф-на в $V_\delta(\bar{x})$. Подставим ф-цию $y_m(x)$ в ф-цию $y_m - y_{m-1}$, получим некоторое реш-е системы (1). т.2.2

След-ие из т.1 Пусть функ-я $y = f(x)$ опред-на и диф-на в нек-ой окрест-ти T, x_0 ; $f'(x)$ непрер-на в T, x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда в нек-ой окрест-ти $T, y_0 = f(x_0) \exists!$ функ-я $x = g(y)$, т.2. $f(g(y)) = y$

$\forall y$ из той окр-ти; функ-я g диф-на (и непрер-на) в этой окр-ти и $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ (т.е. $g = f^{-1}$)

Д-во Рассмотрим ф-цию $F(x, y) = f(x) - y$. Эта ф-ция диф-на в некот-й окр-ти $T, (x_0, y_0)$; $F(x_0, y_0) = 0$; $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x)$ - непрер-на и $\neq 0$ в $T, (x_0, y_0)$ $\Rightarrow$ в некоторой окр-ти T, y $\exists!$ реш-е ур-е $F(x, y) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = y$: функ-я $x = g(y)$. Эта функ-я диф-на в окрест-ти и $g'(y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = - \frac{-1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(x)}$ т.2.2

След-ие из т.2 Пусть функ-и $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ опред-ны и диф-ны в некоторой окрест-ти $T, \bar{x}$. Пусть все чл $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}}$ $\neq 0$ и $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрер-ны в $T, \bar{x}$ и якобиан $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{\bar{x}} \neq 0$. Обозначим $y_i^0 = f_i(\bar{x})$.

Тогда, в некоторой окр-ти $T, \bar{y} = (y_1^0, \dots, y_n^0) \exists!$ функ-и $x_i = g_i(y_1, \dots, y_n)$

$x_n = g_n(\bar{y})$, т.е. $f_k(g_1(\bar{y}), \dots, g_n(\bar{y})) = \bar{y} \quad \forall \bar{y}$ из этой окр-ти. При этом все функ-ии $g_1, \dots, g_n$ л-се диф-ми в указанной окр-ти.
З-ба: Применим Т.2 к системе $\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) - y_1 = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) - y_n = 0 \end{cases}$ и разрешим её отно-но пер-х $x_1, \dots, x_n$. т.е.

§. 17. Функциональная зависимость

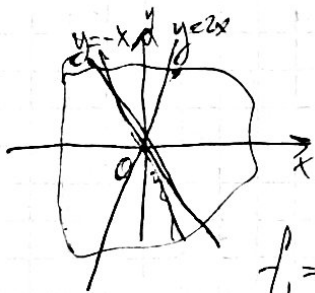
Пусть функ-ии $y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)$ опред-ны на некотором мн-ве X .

Опр. 1 Функ-я $y_k(\bar{x})$ зависит на мн-ве X от функций $y_1(\bar{x}), \dots, y_{k-1}(\bar{x}), y_{k+1}(\bar{x}), \dots, y_m(\bar{x})$, или на мн-ве $Q = \{(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m)\}$ $y_1 = y_1(\bar{x}), \dots, y_{k-1} = y_{k-1}(\bar{x}), y_{k+1} = y_{k+1}(\bar{x}), \dots, y_m = y_m(\bar{x}), \bar{x} \in X$ определена дифференцируемая функ-я $F(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m)$, т.е. $y_k(\bar{x}) = F(y_1(\bar{x}), \dots, y_{k-1}(\bar{x}), y_{k+1}(\bar{x}), \dots, y_m(\bar{x})) \quad \forall \bar{x} \in X$. Система функ-ий $y_1, \dots, y_m$ зависима на мн-ве X , если хотя бы одна из функций имеет завис-е на этом мн-ве от остальных, и независима в противном случае.

Примеры 1) $f_1(x, y) = x^2 y^2$, $f_2(x, y) = xy$, $f_3(x, y) = x + y$. Эта система л-се завис-ой на любом мн-ве $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $f_1 = f_3^2 - 2f_2$.

2) $f_1(x, y) = x + y$, $f_2(x, y) = 2x - y$. Покажем, что система f_1, f_2 независ-има на любом мн-ве $X \subseteq \mathbb{R}^2$, содержащем нек-ую окр-ть

т. (0, 0):



На прямой $y = -x$: $f_1 = 0, f_2 = 3x \Rightarrow$

f_2 не зависит от f_1 на этой прямой.

Аналогично на прямой $y = 2x$:

$f_1 = 3x, f_2 = 0 \Rightarrow f_1$ не зависит от f_2 на этой

прямой

Т. 1 Пусть функ-ии $y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)$, $n \geq m$, определены и диф-ми в нек-ой окрест-ти т. $\bar{x}^0$. Если якобиан этих функ-ий по каким-либо m переменным отличен от 0 в т. $\bar{x}^0$, то функ-ии независимы в окр- (окрест-ти) т. $\bar{x}^0$.

Д-во: можем считать, что $\Delta = \frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} \Big|_{\bar{x}} \neq 0$,

предположим, что $\exists \delta > 0$,

т.е. ф-ция $y_k(\bar{x})$ зависит от $y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m$ в $B_\delta(\bar{x})$. Тогда $y_k(\bar{x}) = F(y_1(\bar{x}), \dots, y_{k-1}(\bar{x}), y_{k+1}(\bar{x}), \dots, y_m(\bar{x})) \forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{x})$, причем ф-ция F определена на нек-м мн-ве D . Значит,

$\forall j=1, \dots, m$: $\frac{\partial y_j}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}} = \frac{\partial F}{\partial y_1} \Big|_{\bar{y}} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_{k-1}} \Big|_{\bar{y}} \cdot \frac{\partial y_{k-1}}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}} + \frac{\partial F}{\partial y_{k+1}} \Big|_{\bar{y}} \cdot \frac{\partial y_{k+1}}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_m} \Big|_{\bar{y}} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}}$, где $\bar{y} = (y_1(\bar{x}), \dots, y_{k-1}(\bar{x}), y_{k+1}(\bar{x}), \dots, y_m(\bar{x}))$. Значит-е означает, что k -тый столбец определ-ля Δ является линейной комбинацией остальных столбцов $\Rightarrow \Delta = 0 (!)$ т.е.

Пример $f_1 = x+y, f_2 = 2x-y$; $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2 = -3 \neq 0$ в любой т. $\Rightarrow$ системы f_1, f_2 независимы на любом мн-ве $X \subseteq \mathbb{R}^2$.

Л.2 Пусть ф-ции $y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)$ определены и дифференцируемы в нек-ой окрестности т. $\bar{x}$; пусть все ЧП $\frac{\partial y_k}{\partial x_j}$ непрерывны в т. $\bar{x}$, $1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n$. Если у матрицы $\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ нек-тые миноры порядка r отличаются от 0 в т. $\bar{x}$ ($r \leq \min\{m, n\}$), а все миноры порядка $r+1$ равны нулю в окрестности т. $\bar{x}$ (если $r < \min\{m, n\}$), то r ф-ций, представленных в указанном миноре, независимы в нек-ой окрестности т. $\bar{x}$, а каждая из остальных ф-ций зависит от них в этой окр-ти. В определении зависимости будем считать, что X — это область (т.е. открытое связное мн-во).

Д-во: Не ограничивая общности, можем считать, что

$\Delta_r \Big|_{\bar{x}} \neq 0$, где $\Delta_r = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_r}{\partial x_r} \end{vmatrix}$. Тогда из т. 1 $\Rightarrow$ ф-ции $y_1, \dots, y_r$ независимы в любой окрестности т. $\bar{x}$. Если $r = m$, то ф-ций больше нет, и все доказано. Пусть $r < m$. Покажем, например, что ф-ция y_{r+1} зависит от $y_1, \dots, y_r$ в нек-ой окр-ти т. $\bar{x}$. Рассмотрим ф-ции

$F_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_z) = g_k(x_1, \dots, x_n) - y_k, 1 \leq k \leq z$ и составим систему

$$\begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \end{cases} \quad \text{Эти ф-ции опред-н и диф-ми в окрестности}$$

т. $\bar{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_z^0)$, где $y_k^0 = g_k(\bar{x}^0), k=1, \dots, z$.

Все ЧП $\frac{\partial F_k}{\partial x_j} = \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \Rightarrow$ крив-ми в т. $\bar{x}^0, 1 \leq k, j \leq n+z$.

$$F_k(\bar{x}^0) = 0, k=1, \dots, z; \quad \frac{\partial(F_1, \dots, F_z)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{\bar{x}^0} = \Delta_2|_{\bar{x}^0} \neq 0 \text{ по у-ию.}$$

Значит, из т. 2 § 16 $\Rightarrow$ у системы Э! реш-е $x_1 = x_1(x_{z+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_z), \dots, x_z = x_z(x_{z+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_z)$, причём все ф-ии этого реш-ния диф-ми в некоторой окрестн. соотв-й т. Подставим эти ф-ии в ф-ию $g_{z+1}: g_{z+1}(x_1(x_{z+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_z), \dots, x_z(x_{z+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_z), x_{z+1}, \dots, x_n) = \varphi(x_{z+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_z) (*)$. Хотим показать, что $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0$ в некоторой окрест-ти $\forall j = z+1, \dots, n$ (это будет означать, что на линии где φ не зависит от $x_{z+1}, \dots, x_n \Rightarrow g_{z+1} = \tilde{\varphi}(y_1, \dots, y_z) = \tilde{\varphi}(g_1, g_2)$. Заметим, что если $z=n$, то φ уже не зависит от $x_{z+1}, \dots, x_n$ в силу условия

пер-х $x_{z+1}, \dots, x_n$ и всё док-но. Пусть $z < n$. Возьмём произ-е

предер-ли по x_j все ур-е нашей системы и соот-е (*):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_z}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_z}{\partial x_2} & \frac{\partial g_z}{\partial x_j} \\ \frac{\partial g_{z+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_{z+1}}{\partial x_2} & \frac{\partial g_{z+1}}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

По условию ко-р-ми её определ-ль Δ^j равен нулю в нек-ой окрестн. т. $\bar{x}$.

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial g_k}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_j} + \frac{\partial g_k}{\partial x_j} = 0, 1 \leq k \leq z$$

$$\frac{\partial g_{z+1}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial g_{z+1}}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{z+1}}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}^0} \cdot \Delta_{z+1}^j$$

$\Delta_k^j, k=1, \dots, z+1$ - алгебраич. дополнения к эл-там последнего столбца мат-цы J (заметим, что $\Delta_{z+1}^j = \Delta_2$).

Получим, что

$$\sum_{i=1}^z \left(\underbrace{\frac{\partial g_i}{\partial x_1} \cdot \Delta_1^j + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \cdot \Delta_i^j}_{=0 \text{ по пер. с ф-ции соот-е}} \right) \frac{\partial x_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_j} \cdot \Delta_1^j + \dots + \frac{\partial g_{z+1}}{\partial x_j} \Delta_{z+1}^j \right) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot \Delta_{z+1}^j = \Delta_2 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot \Delta_2 = \Delta^j. \text{ Все ЧП, входящие в } \Delta_2, \text{ крив-ны,}$$

$\Delta_2|_{\bar{x}^0} \neq 0 \Rightarrow \Delta_2$ отличен от нуля в некот-ой окрестн. т. $\bar{x}^0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot \frac{\Delta^j}{\Delta_2} = 0 \text{ в некоторой окр-ти т. } \bar{x}^0. \text{ т.е.}$$

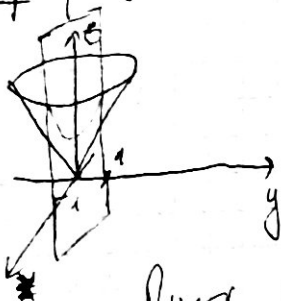
§ 18. Условный экстремум.

Восстановка задачи: $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \rightarrow \text{ext}$ при условии, что выполняются уп-е связи:
$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Опр. 1 Точка $\bar{x}' = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$, удовлетворяющая системе (1), называется точкой условного максимума (минимума) ф-ции f при наличии связей (1), если $\exists \delta > 0$, т.е. $f(\bar{x}') > f(\bar{x})$ ($f(\bar{x}') < f(\bar{x})$) $\forall \bar{x} \in \delta$ и такой, что $\bar{x}$ удовл-т системе (1).

Пример $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \text{ext}$; $x + y = 1$. Выразим y через x .

$$f'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}} \Rightarrow x_{\min} = \frac{1}{2}; y_{\min} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$



Ответ: $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ - точка уст. минимума.

Пусть ф-ции $f, F_1, \dots, F_m$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности т. $\bar{x}'$; все $\frac{\partial F_k}{\partial y_j}$ непрерывны в т. $\bar{x}'$,

$1 \leq j, k \leq m$; $\Delta = \frac{\Delta(F_1, \dots, F_m)}{\Delta(y_1, \dots, y_m)} \Big|_{\bar{x}'} \neq 0$. Тогда система (1) разрешима в

некоторой окрестности т. $\bar{x}'$, т.е. в окр-ти т. $\bar{x}' = (x_1^0, \dots, x_n^0) \exists$ дифференцируемое решение $y_1(x), \dots, y_m(x)$.

Подставим эти ф-ции в ф-цию f , $f(x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$. Если ф-ция f имеет в т. $\bar{x}'$ условный экстремум, то ф-ция φ имеет экстремум в т. $\bar{x}' \Rightarrow d\varphi|_{\bar{x}'} = 0 \Rightarrow$

(в силу инв-ти формул 1-го диф-ла): $\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}'} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}'} dx_n + \frac{\partial f}{\partial y_1} \Big|_{\bar{x}'} dy_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m} \Big|_{\bar{x}'} dy_m \stackrel{(3)}{=} 0$. Здесь $dy_1, \dots, dy_m$ - не независимые

прираще-я, а дифференциалы ф-ции $y_1, \dots, y_m$. Выразим их через $dx_1, \dots, dx_n$. Для этого продиф-м систему (1).

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}'} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}'} dx_n + \frac{\partial F_k}{\partial y_1} \Big|_{\bar{x}'} dy_1 + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial y_m} \Big|_{\bar{x}'} dy_m = 0, \quad 1 \leq k \leq m. \quad (4)$$

Система (4) явл-ся линейной стн-но переменных $dx_1, \dots, dx_n, dy_1, \dots, dy_m$.

Её определитель $= \Delta \neq 0 \Rightarrow \exists!$ решение. Подставим это решение в ур-е (3), получим: $A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = 0$. Здесь коэф-ты $A_1, \dots, A_n$ выраж-ся через $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}'}, \frac{\partial f}{\partial y_j} \Big|_{\bar{x}'}, \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}'}, \frac{\partial F_1}{\partial y_j} \Big|_{\bar{x}'}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k, j \leq m$.

Поскольку $dx_1, \dots, dx_n$ - независимые приращения, то получим необход-е усл-е экстремума: $A_1 = 0, \dots, A_n = 0, F_1 = 0, \dots, F_m = 0$ (5).

Метод множителей Лагранжа

Умножим к-тое ур-е системы (4) на вспомогательный множитель λ_k , сложим по k от 1 до m и прибавим к ур-ю (3):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}'} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}'} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}'} \right) dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}'} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}'} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}'} \right) dx_n + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \Big|_{\bar{x}'} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \Big|_{\bar{x}'} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_1} \Big|_{\bar{x}'} \right) dy_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial y_m} \Big|_{\bar{x}'} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \Big|_{\bar{x}'} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \Big|_{\bar{x}'} \right) dy_m = 0.$$

Обозначим $U(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m$ - фун-я Лагранжа. Последнее соотношение можно переписать в виде: $\frac{\partial U}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}'} dx_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}'} dx_n + \frac{\partial U}{\partial y_1} \Big|_{\bar{x}'} dy_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial y_m} \Big|_{\bar{x}'} dy_m \stackrel{(6)}{=} 0$.

Подберём значения $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ так, чтобы $\frac{\partial U}{\partial y_1} = 0, \dots, \frac{\partial U}{\partial y_m} = 0$. Запишем соот-но системы ур-й:

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} \Big|_{\bar{x}'} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{\bar{x}'}}_{\text{пр-е (3)}} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \Big|_{\bar{x}'} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \Big|_{\bar{x}'} = 0, \quad k=1, \dots, n. \quad (7)$$

Система (7) л-ся линейной отн-но переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Её определитель $= \Delta \neq 0 \Rightarrow \exists!$ решение $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$.

Обозначим $\bar{x}'' = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$. Получаем, что $\frac{\partial U}{\partial x_k} \Big|_{\bar{x}''} = 0, 1 \leq k \leq n$. Подставим эти соотн-я в (6), получаем, что

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}''} dx_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}''} dx_n = 0. \text{ Здесь } dx_1, \dots, dx_n \text{ - независимые прир-е} \\ \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}''} = 0, \quad j=1, \dots, n. \text{ Кроме того, } \frac{\partial U}{\partial \lambda_j} \Big|_{\bar{x}''} = F_j(\bar{x}') = 0 \quad 1 \leq j \leq m. \\ \text{пр-е (5)}$$

Получим необходимые усл-я экстремума в терминах ф-ции Лагранжа: $\frac{\partial U}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}''} = 0, \frac{\partial U}{\partial y_k} \Big|_{\bar{x}''} = 0, \frac{\partial U}{\partial \lambda_j} \Big|_{\bar{x}''} = 0, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k, j \leq m$.

Пример

$f = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \text{екстр}, x+y=1$. Фун-я Лагранжа: $G(x, y, \lambda) = \sqrt{x^2 + y^2} + \lambda(x+y-1)$.
 $\begin{cases} L'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \lambda = 0 \\ L'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \lambda = 0 \\ L'_\lambda = x+y-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x=y.$
 $\Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$. Значит экстр. т.
 $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Т.1 (прямая. упр-е экстр. т. 1/2)

Пусть пр-ми $f, F_1, \dots, F_m$ заданы в окрестности т. $\bar{x}'$ и глоб. экстр. экстр-мы в т. $\bar{x}'$. Тогда $\bar{x}'$ есть т. усл. максимума (минимума) фун-и f при наличии связей (1), если $d^2L|_{\bar{x}'}$ (>0) для любого набора $dx_1, \dots, dx_n, dy_1, \dots, dy_m$, удовлетв-го с-ие (4). Если на мн-ве таких наборов $d^2L|_{\bar{x}'}$ меняет знак, то экстр. нет.

Пример (прямая-лине)

$$L''_{xx} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad L''_{yy} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad L''_{xy} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

$$d^2L|_M = \frac{\sqrt{2}}{2} (dx^2 - 2dx dy + dy^2) = \left| \begin{matrix} x+y=1 \\ dx+dy=0 \end{matrix} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} (dx^2 + 2dx^2 + dx^2) > 0 \Rightarrow \text{т. экстр. мин.}$$

На самом деле:

$$\begin{aligned}
 d^2L &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial x_i} dx_i dy_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_k} dy_j dy_k + \\
 &+ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} d\lambda_j d\lambda_k + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial \lambda_j} dx_i d\lambda_j + 2 \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial y_k \partial \lambda_j} dy_k d\lambda_j + \\
 &+ \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial y_k \partial \lambda_j} d\lambda_j \quad \text{т.к. } \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = F_j \\
 &\quad \text{т.к. } \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = F_j = 0 \text{ в силу условий экстр.} \quad \text{т.к. } \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = F_j = 0 \text{ в силу условий экстр.}
 \end{aligned}$$

Отскакивание наибольшего и наименьшего значений фун-ии

Применение условного экстремума

I. Фун-я $f(x_1, \dots, x_n)$ достигает своих наибольшего и наименьшего значений на замкнутом ограниченном мн-ве X либо на границе мн-ва, либо во внутр. точках

жест.

Пример $f = x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 2z$. Найдём max и min f на множестве $X = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; z \geq 0\}$.

а) Найдём крит. т. внутри X : $\begin{cases} f'_x = 2x - 2 = 0 \\ f'_y = 2y - 2 = 0 \\ f'_z = 2z - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow M_1(1, 1, 1)$ — единств. крит. т.

Полусфера: S, D .

$$L = x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$$

$$f(M_1) = -3.$$

$$L'_x = 2x - 2 + 2\lambda x = 0, \quad L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = y = z = \frac{1}{1+\lambda}$$

$$L'_y = 2y - 2 + 2\lambda y = 0$$

$$L'_z = 2z - 2 + 2\lambda z = 0$$

$$\frac{3}{(1+\lambda)^2} = 4 \Rightarrow 1+\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 1+\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ не доп-т } (z \geq 0)$$

$\Rightarrow$ ед. крит. т. на S : $M_2(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}})$. $f(M_2) = 4 - 4\sqrt{3}$.

б) На нижней сф. $D = \{x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$. $\Rightarrow$ найдем $f = x^2 - 2x + y^2 - 2y$

Внутри круга D : $\begin{cases} f'_x = 2x - 2 = 0 \\ f'_y = 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_3(1, 1, 0)$ лежит внутри круга $f(M_3) = -2$.

На границе круга: $x^2 + y^2 = 4$, $L = x^2 - 2x + y^2 - 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$,

$$\begin{cases} 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ 2y - 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$x = y = \frac{1}{1+\lambda} \Rightarrow \frac{2}{(1+\lambda)^2} = 4 \Rightarrow (1+\lambda) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow M_4(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \quad f(M_4) = 4 - 4\sqrt{2}$$

$$M_5(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0); f(M_5) = 4 + 4\sqrt{2}$$

II. Решим задачу: представьте неотриц. число a в виде max сумм пяти неотриц. слагаемых, так, чтобы их произведение было наибольшим. ($x_k \geq 0, k=1, \dots, 5$)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \rightarrow \max, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a.$$

$$L = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - a), \quad \begin{cases} L'_{x_k} = \frac{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}{x_k} + \lambda = 0; \end{cases}$$

На замкнутой выпукл. множестве $X = \{x_k \geq 0\}$, $L'_\lambda = x_1 + \dots + x_5 - a = 0$

$$k=1, \dots, 5; x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = a \text{ — условие} \quad x_k = \frac{-x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}{\lambda}, \quad k=1, \dots, 5 \Rightarrow$$

$$f \text{ достигает max либо в т. } M(\frac{a}{5}, \dots, \frac{a}{5}), \quad \Rightarrow x_1 = \dots = x_5 = \frac{a}{5}.$$

либо на границе. На границе $f = 0$. $\Rightarrow$ это не глоб. max.

$$\text{Ответ: } a = \frac{a}{5} + \dots + \frac{a}{5}$$

38. Методы нахождения корней ур-ий

Будем рассматривать два ур-ия: $f(x)=0$ (1) и $F(x)=x$ (2),
 $x \in [a, b]$. Лемма Пусть $F \in C[a, b]$; $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ послед-и
 -ых, построенной по функ-и F , если $x_0 \in D_F$ и $x_n = F(x_{n-1}) \forall n \in \mathbb{N}$.

Лемма Пусть $F \in C[a, b]$; $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ - итерат. послед-ть, построенная
 по F , $x_n \in [a, b]$, $n=0, 1, \dots$. Если $\exists c = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, то $F(c) = c$.

Доказ. Перейдем в соот-и: $x_n = F(x_{n-1})$ к пределу при $n \rightarrow +\infty$. В

силу непр-ти функ-и F : $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_{n-1}) = F(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n-1}) = F(c)$ т.е.

Пусть функ-е f :

- 1) $f \in C^1[a, b]$
- 2) $f(a) \cdot f(b) < 0$
- 3) f' монотонна на $[a, b]$;
- 4) f' сохраняет знак на $[a, b]$.

Возможно 4 варианта: а) $f' > 0$ и $\nearrow$; б) $f' < 0$ и $\searrow$; в) $f' > 0$ и $\searrow$;
 г) $f' < 0$ и $\nearrow$.

Из условий 1), 2), 4) $\Rightarrow f$ имеет единствен. корень на $[a, b]$.

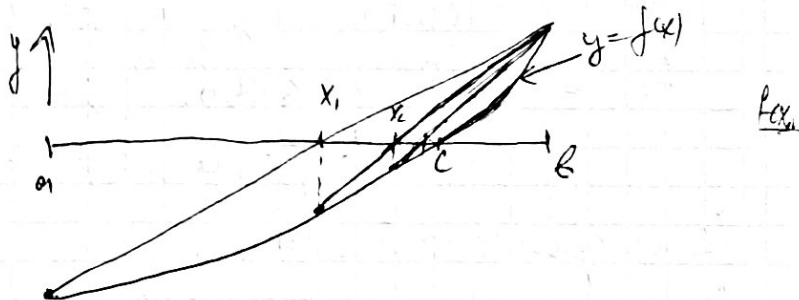
Метод хорд

Рассмотрим подробно случай а). Введем вспомог-ю функ-
 кцию $F(x) = \begin{cases} x - \frac{f(x)(b-x)}{f(b)-f(x)}, & a \leq x < b \\ b - \frac{f(b)}{f'(b)}, & x = b \end{cases}$ Заметим, что $F \in C[a, b]$ и
 ур-е $f(x)=0 \Leftrightarrow F(x)=x$, $x \in [a, b]$.

Построим по функ-и F итерационную послед-ть: $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $x_0 = a$,
 $x_n = F(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Упомянутый случай:

Напишем ур-е хорды,
 соединяющей т. $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$

$$\text{и } (b, f(b)): \frac{x - x_{n-1}}{b - x_{n-1}} = \frac{y - f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}.$$



Найдем абсциссу пересеч-я с осью Ox : полагая $y=0$, тогда
 $x = - \frac{f(x_{n-1})(b - x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})} + x_{n-1} = F(x_{n-1}) \rightarrow x_n = F(x_{n-1})$ - искомая абсцисса.

Т.1 (обоснование метода хорд)

Послед-ть $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$, построенная по функ-и F , сходится к корню
 ур-я (1).

2-е: Обозначим: c - корень ур-я (1), тогда $F(c) = 0$. Док-м по индукции, что посл-ть $\{x_n\}$ не уб-т, и все её элементы лежат на отрезке $[a, c]$: $x_0 \in [a, c]$ - верно. $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(b-x_{n-1})}{f(b)-f(x_{n-1})} = x_{n-1} + \frac{(f(c)-f(x_{n-1}))(b-x_{n-1})}{f(b)-f(x_{n-1})}$ (применим формулу Тейлора, $\eta_n \in [x_{n-1}, c]$) $\circ$

$$\begin{aligned} (*) \quad \circ x_{n-1} + \frac{f'(\eta_n)(c-x_{n-1})(b-x_{n-1})}{f'(\xi_n)(b-c) + f'(\eta_n)(c-x_{n-1})} &\leq (0 < f'(\eta_n) \leq f'(\xi_n)) \\ &\leq x_{n-1} + \frac{f'(\eta_n)(c-x_{n-1})(b-x_{n-1})}{f'(\eta_n)(b-c) + f'(\eta_n)(c-x_{n-1})} = c \Rightarrow x_n \leq c. \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_n = x_{n-1} + \text{что-то неотр.} \Rightarrow x_n \geq x_{n-1}$, причём $x_n = x_{n-1} \Leftrightarrow x_{n-1} = c$. Отсюда получаем также, что $x_n \geq a$. Послед-ть $\{x_n\}$ не убывает и др. сверху - сход-ся. Поскольку все элем-ты $\{x_n\}$ лежат на $[a, b]$, $F \in C[a, b]$, то из леммы $\Rightarrow x_n \rightarrow c$, где c - корень ур-я (2) $\Rightarrow$ корень ур-я (1) т.е.

Замечание в случае δ  ниско не монотонна в от-х функ-и F.

в случаях δ_2 : $F(x) = \begin{cases} x - \frac{f(a)(x-a)}{f(x)-f(a)}, & a \leq x \leq b \\ a - \frac{f(a)}{f(b)}, & x = a \end{cases}; x_0 = b.$

$\{x_n\}$ будет не возр-ть;
 $x_n \in [a, b]$.

Метод касательных (метод Ньютона)

Снова рассматр. случай а). Строим вспомог-ю функ-ию:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad a \leq x \leq b. \text{ Тогда } F \in C[a, b] \text{ и } F(x) - x \Leftrightarrow f(x) = 0, \text{ где}$$

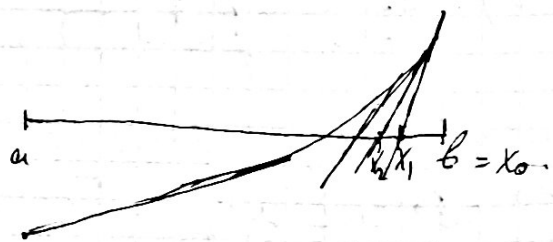
построим итер-ю посл-ть $\{x_n\}$, $x_n = F(x_{n-1})$, $x_0 = b$.

Геометрический смысл:

Ст-е касательной в т. $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$:

$$y = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}) + f(x_{n-1}).$$

Найдём абсциссу пересек-я касат.



с осью Ox : $y=0 \Rightarrow x = -\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} + x_{n-1} = F(x_{n-1})$. Т.е. x_n - абсцисса нуле-ния с осью Ox касательной к графику $y=f(x)$ в т. $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$.

В случае δ тоже самое. В случае δ_2 : $x_0 = a$.

Т.2 (базовые методы Ньютона)

Искаем послед-я, построенная по функ-и F , ес-е с кор-ю ур-я (1).
Дано: Пусть $x_0 = b$, $x_n = F(x_{n-1}) = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$. Показ-м по индукции, что $\{x_n\}$ не воз-ст, $x_n \in [c; b]$, $n = 0, 1, \dots$, где c - корень ур-я (1).

$x_0 = b \in [c; b]$. Пусть $x_{n-1} \geq c$, тогда $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \geq f(c) = 0$
 при этом $x_n = x_{n-1} \Leftrightarrow x_{n-1} = c$. $\Rightarrow x_n \leq x_{n-1}$

Далее, $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1}) - f(c)}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{f'(\xi_n)(x_{n-1} - c)}{f'(x_{n-1})} \geq x_{n-1} - (x_{n-1} - c) = c$
 1. Попр., $\xi_n \in (c, x_{n-1})$
 $0 < f'(\xi_n) \leq f'(x_{n-1}) \Rightarrow f'(\xi_n) \leq f'(x_{n-1})$

$\Rightarrow x_n \geq c$. Кроме того, поскольку $x_{n+1} \leq x_n$, то $x_n \leq b$. Значит, $\{x_n\}$ не воз-ст и ор. снизу $\Rightarrow$ ес-е. Все чл-ые $\{x_n\}$ лежат на $[c; b]$, $F \in [c; b]$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, где c - корень ур-я (2) и (1) т.д.

Полезности методов хорд и касательных

$$f(x_n) - f(c) \geq f'(\xi_n)(x_n - c) \Rightarrow |x_n - c| \leq \frac{|f(x_n)|}{\inf_{c \leq x \leq b} |f'(x)|} \neq 0$$

т. Липшица

§3. Приближенные методы вычисления интегралов

Цель: Пусть функ-я f определена на $[a; b]$; $x_1, \dots, x_n \in [a; b]$; $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.
Рассмотрим взв-е: $\frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$ - среднее чисел $x_1, \dots, x_n$. Если $a \leq x_1, \dots, x_n \leq b$, то $a \leq c \leq b$.

Теперь запишем среднее чисел $f(x_1), \dots, f(x_n)$: $\frac{\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$
Лемма 1 Если $f \in [a; b]$, то $\exists \xi \in [a; b]$: $f(c) = f(\xi)$

Дано: Пусть $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$. Тогда $m \leq f(x_i) \leq M \cdot \lambda_i$
 $\Rightarrow m \leq f_c \in M \Leftrightarrow$ по Г. о продолж. непр.

функ-я чрез пром. значение: $\exists \xi \in [a; b]: f_c = f(\xi)$ т.д.
 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \approx f(\xi)(b-a) = f_c(b-a)$
 т.е. о среднем

Мат. Анализ

$$\text{Пример } f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}(\sin \frac{\pi}{x}), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Т.е. разрыва f на $[0, 1]$: $x_0 = 0, \frac{\pi}{x_n} = \pi n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$
 Для $\varepsilon > 0$. Интервал $(-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4})$ покрывает T, x_0 и x_n :
 $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow n > \frac{4}{\varepsilon}$. Не покажи на интервал T, x_n , т.е. $n = 1, 2, \dots, [\frac{4}{\varepsilon}]$.

Каждую из этих точек покроем интервалом $(x_n - \frac{\varepsilon}{8n}, x_n + \frac{\varepsilon}{8n})$, $n = 1, \dots, m$. Таким образом, f ограничена на $[0, 1]$ и $\forall \varepsilon > 0$,
 все T разрыва f на $[0, 1]$ можно покрыть конечным числом
 интервалов суммарной длины: $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4m} \cdot m = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon \Rightarrow f \in R[0, 1]$

$$2) R(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \end{cases} \text{ — функция Римана, разрыва в раз-} \\ \text{точках и непрерывна в иррац.-х.}$$

Докажем, что $R \in R[0, 1]$. Очевидно, что она ограничена. Покажем
 это. Сожмем $N = [\frac{2}{\varepsilon}] + 1$ (чтобы $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$): $\delta = \frac{\varepsilon}{2N^2}$. Пусть

$T = \{x_0, \dots, x_n\}$ — разбиение отрезка $[0, 1]$, $\Delta_T < \delta$. Рассмотрим те
 отрезки разбиения для которых $\frac{w_k}{N} \geq \frac{1}{N}$. На каждом
 из таких отрезков длина будет $\geq \frac{1}{N}$ точка, где
 k -ой $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{N} \Leftrightarrow n \leq N$. Пусть это точка вида $\frac{m}{n}$, т.к. $\frac{m}{n} \leq 1$,
 то $m \leq N$. Таких точек всего на $[0, 1]$ не больше, чем $N^2 \Rightarrow$

таких отрезков не больше, чем N^2 . Имеем, $S'(T) - S(T) =$

$$\sum_{k: \frac{w_k}{N} \geq \frac{1}{N}} \underbrace{w_k}_{\leq \delta} \cdot \underbrace{\Delta x_k}_{\leq \frac{1}{N}} + \sum_{k: \frac{w_k}{N} < \frac{1}{N}} w_k \cdot \Delta x_k < \underbrace{\delta \cdot N^2}_{\frac{\varepsilon}{2N^2}} + \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^n \Delta x_k}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow R \in R[0, 1]$$

по критерию Римана

Спр* Множ-во $A \subset \mathbb{R}$ имеет меру нуль по Лебегу, если
 $\forall \varepsilon > 0$ все точки мн-ва A можно покрыть не более, чем счётной
 системой интервалов суммарной длины $< \varepsilon$.

Теорема* (критерий Лебега интегр-ти ф-ции). Пусть f определена
 на $[a, b]$, $f \in R[a, b] \Leftrightarrow$ мн-во её точек разрыва на $[a, b]$ имеет
 меру нуль по Лебегу.

Узв* любое счётное мн-во имеет меру ноль по Лебегу.
 Тз Пусть f определена на $[a, b]$ и монотонна на нём. Тогда $f \in R[a, b]$.

Док-во: Рассм. случай, когда f не убывает. Если $f(a) = f(b)$, то f постоянна $\Rightarrow f \in R[a, b]$. Пусть $f(a) < f(b)$. Возьмём $\varepsilon > 0$ и обозначим $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} > 0$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ γ -разбиение $[a, b]$, $\Delta_T < \delta$, тогда $S_f(T) - s_f(T) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \delta \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \delta \cdot (b - a) = \varepsilon$.
 * $(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta \cdot (f(x_k) - f(a) + f(a) - f(x_{k-1}) + \dots + f(b) - f(x_{k-1}))$
 в сумм. $\Rightarrow \varepsilon \Rightarrow f \in R[a, b]$. т.з.

Опр.1 Фун-ия f узов-ет условие Липшица на отрезке $[a, b]$, если $\exists C > 0$, т.з. $\forall x_1, x_2 \in [a, b]: |f(x_1) - f(x_2)| \leq C \cdot |x_1 - x_2|$.
 Липш $f \in Lip[a, b]$.

Т.4 Пусть $f \in R[a, b]$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$. Если g — л-я g на отрезке $[m, M]$ и $g \in Lip[m, M]$, то $g \circ f \in R[a, b]$.

Док: Возьмём $\varepsilon > 0$. $\exists T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ — разбиение $[a, b]$, т.з. $S_f(T) - s_f(T) < \frac{\varepsilon}{C}$, где C — постоянная из условия Липшица для g . Обозначим $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, $m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, $M_k^* = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(f(x))$, $m_k^* = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(f(x))$. Заметим, что $\forall x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]: |g(f(x')) - g(f(x''))| \leq C \cdot |f(x') - f(x'')| \leq C \cdot (M_k - m_k)$
 $\Rightarrow M_k^* - m_k^* \leq C \cdot (M_k - m_k)$.

Тогда $S_{g \circ f}(T) - s_{g \circ f}(T) = \sum_{k=1}^n (M_k^* - m_k^*) \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n C (M_k - m_k) \Delta x_k = C \cdot (S_f(T) - s_f(T)) < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon \Rightarrow g \circ f \in R[a, b]$.

Замечание Справедливо более сильное утв-е (без g -ва), если $f \in R[a, b]$, $g \in C[m, M]$, то $g \circ f \in R[a, b]$. Композиция двух интерпр. ф-ций не обязана быть интерпр-ой.

Пример $f(x) = R(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \end{cases} \in R[0, 1]$; $g(y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ 1, & y \neq 0 \end{cases} \in R[0, 1]$
 $g(f(x)) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ — фун-ия Дирихле не интерпр-ой.

33. Св-ва определённого интеграла. Оценки интегралов.

1) $f, g \in R[a, b] \Rightarrow (f \pm g) \in R[a, b]$, причём
 $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.

Доказательство: $\forall$ V -разм. разб. ξ_k в $[a, b]$: $\sum_{k=1}^n (f(\xi_k) \pm g(\xi_k)) \Delta x_k =$
 $= \underbrace{\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k}_{\text{к интегр.}} \pm \underbrace{\sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k}_{\text{к интегр.}} \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \dots$

2) $f \in R[a, b], \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha \cdot f) \in R[a, b]$, причём
 $\int_a^b \alpha \cdot f(x) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx$ Доказательство: аналогично.

Св-ва 1, 2) - линейность интеграла.

3) Если $f, g \in R[a, b]$, то $(f \cdot g) \in R[a, b]$

Доказательство: Пусть $f \in R[a, b]$. Докажем, что $f^2 \in R[a, b]$. Действительно, ф-ция y^2 удовл-т условию Липшица на любом отрезке M :
 $|y_1^2 - y_2^2| \leq |y_1 - y_2| \cdot (|y_1| + |y_2|) \leq 2 \max\{|M|, |M|\} \cdot |y_1 - y_2| \Rightarrow$

любая ф-ция $f^2 \in R[a, b]$. Далее, $f \cdot g = \frac{1}{4} ((f+g)^2 - (f-g)^2) \in R[a, b]$.

4) Если $f \in R[a, b]$, $a \leq c \leq d \leq b$, то $f \in R[c, d]$. $\in R[a, b] \Rightarrow \in R[c, d]$ с.г.

Доказательство: Возьмём $\varepsilon > 0$. $\exists T = \{x_0, \dots, x_n\}$ -разб. $[a, b]$:

$S(T) - s(T) < \varepsilon$. Обозначим $T' = T \cap [c, d]$, тогда $S(T') - s(T') \leq S(T) - s(T) < \varepsilon$. Пусть $T'' = T' \cup [c, d]$, тогда $S(T'') - s(T'') \leq S(T') - s(T') < \varepsilon \Rightarrow f \in R[c, d]$ с.г.

5) Аддитивность. Пусть $f \in R[a, c], f \in R[c, b]$. Тогда $f \in R[a, b]$, причём $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Доказательство: Пусть $\varepsilon > 0$. $\exists T_1$ -разб. $[a, c]: S(T_1) - s(T_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\exists T_2$ -разб. $[c, b]: S(T_2) - s(T_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $T = T_1 \cup T_2$, тогда

T -разб. $[a, b]$, причём $S(T) - s(T) = S(T_1) - s(T_1) + S(T_2) - s(T_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow f \in R[a, b]$. Пусть теперь V -разм. разб. $[a, b]$.

разбавление таб. т.е. т.е. уб-ся одной, т.е. тогда разбиением.

тогда $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$, $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, $x_n = c$

$\sum_{k=1}^m f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=m+1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ 25.9.

$\int_a^c f(x) dx$ $\int_c^b f(x) dx$